# Equações Diferenciais Ordinarias e Problemas de valor inicial. Métodos de Euler e Crank-Nicolson

MS211 – Cálculo Numérico

Giuseppe Romanazzi

5 Novembro 2020

# Introdução

Introduremos o problema de valor inicial (PVI) e a resolução analítica das equações diferenciais ordinárias (EDO).

Na segunda parte da aula apresentaremos os métodos numéricos de um passo que são utilizados para resolver numericamente os PVI aproximando a solução das equações diferenciais que descrevem o PVI. Apresentaremos os métodos de primeira ordem de Euler: explícito (progressivo) e implícito (regressivo). Também apresentaremos um método superior que resulta ser de segunda ordem, chamado método de Crank-Nicolson. De todos os métodos daremos uma interpretação geométrica e a forma do erro de truncamento local.

# Conteúdo

# Problemas de Valor Inicial

São problemas dinâmicos onde a incógnita $y$ que descreve o problema depende de uma variável independente $x$ (seria $t$ no caso que descreva o tempo), e portanto são problemas onde a incógnita não é um único valor mas é uma função $y = y(x)$ que é aquela que descreve o problema.

# Problemas de Valor Inicial, Exemplos

Considere um carro que percorre uma estrada partindo no tempo $t = 0$ no quilometro 2 de uma estrada. Seja $d = d(t)$ a função que descreve a posição do carro respeito o início da estrada, temos então que $d(0) = 2$. Suponhamos que o carro tem velocidade constante de $40 km/h$ então vale que $\frac{d(t_2)-d(t_1)}{t_2-t_1} = 40$ para cada $t_2 \neq t_1$. Este problema pode ser escrito usando o conceito da derivada $(t_2 \to t1)$. Assim sendo que em cada instante do tempo $t$ o carro percorreu a distância $d(t)$, ela satisfaz a equação diferencial ordinária

$$d'(t) = 40 \quad \text{com } d(0) = 2$$

ou analogamente pode ser dito que $d = d(t)$ resolve o **problema de valor inicial** (PVI)

$$\begin{cases} d'(t) = 40 \\ d(0) = 2 \end{cases}$$

A solução deste PVI obtêm se integrando a **equação diferencial ordinária** $d'(t) = 40$ em $[0, t]$:

$$\int_0^t d'(t)dt = \int_0^t 40 \iff d(t) - d(0) = 40t \iff d(t) = 40t + d(0) = 40t + 2.$$

Como pode ver a solução depende do valor inicial $d(0)$, por isso uma equação diferencial com a condição inicial é chamada **problema de valor inicial**.
Note que a condição inicial pode ser conhecida não necessariamente no ponto $x = 0$. Por exemplo considera o problema:

$$\begin{cases} y'(x) = 10 \\ y(3) = 4 \end{cases}$$

A solução para $x > 3$ é obtida integrando agora em $[3, x]$

$$\int_3^x y'(x)dx = \int_3^x 10 \iff y(x)-y(3) = 10(x-3) \iff y(x) = 10(x-3)+4.$$

Pode ter também problemas onde $y'(x)$ depende de $x$ por exemplo $\begin{cases} y'(x) = 2x \\ y(1) = -4 \end{cases}$. A solução para $x > 1$ é obtida integrando em $[1, x]$
$\int_1^x y'(x)dx = \int_1^x 2x \iff y(x) - y(1) = x^2 - 1 \iff y(x) = x^2 - 5.$
Note que, dado o ponto inicial $x_0$ onde é conhecida a $y(x_0) = y_0$, estamos interessado a conhecer a $y = y(x)$ para $x > x_0$, por isso $x_0$ é chamado **ponto inicial.**

O problema de valor inicial pode também ter equação diferencial com o segundo membro que depende da solução. Por exemplo se a velocidade do carro $d'(t)$ dependesse donde está o carro teremos $d'(t) = f(d(t))$. Um caso clássico é aquele das proliferação das células, ou de nascimentos de coelhos numa reserva natural onde o número de coelhos de uma população depende da taxa de reprodução $r$ dos coelhos, se $r$ for fixa e se foram $c(t)$ o número de coelhos no tempo $t$ a sua variação instantânea é

$$\frac{c(t+\Delta_t) - c(t)}{\Delta_t} = rc(t), \quad \text{com}\Delta_t \to 0$$

Então se tivermos mais coelhos $c(t+\Delta_t) = c(t) + rc(t)\Delta_t$ será maior, usando o conceito de derivada (por $\Delta_t \to 0$) temos $\begin{cases} c'(t) = rc(t) \\ c(t_0) = c0 \end{cases}$ onde $c_0$ é o numero de coelhos no tempo $t_0$ Estes problemas admitem a solução exponencial: $c(t) = c_0 e^{r(t-t_0)}$, que novamente depende da condição inicial.

# Problema de valor inicial (de primeira ordem)

São problemas do tipo

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) & x \in [x_0, \infty[ \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Este problema pode ser escrito simplesmente assim

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Onde a função $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é conhecida e onde $y(x_0) = y_0$ é a condição inicial dada do problema.
São problemas deste tipo todas as equações diferenciais ordinária de primeira ordem com uma condição inicial. Por exemplo:
$\begin{cases} y' = 2y \\ y(-1) = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} y' = y + x \\ y(2) = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} y'(x) = y^2 + xy \\ y(2) = 3 \end{cases}$
são problemas de valor inicial (PVI) de primeira ordem porque a derivada máxima que aparece na equação é a primeira.

# Existência e unicidade da solução

**Teorema**

*O problema* $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ *se tiver*

- $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *contínua respeito* $x$ *em* $\Omega$
- $f$ *Lipschitziana relativamente ao segundo argumento* $y$ *ou seja* : $\exists L > 0$ *tal que* $\forall x \in \Omega\ \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, $|f(x,y_2) - f(x,y_1)| \leq L|y_2 - y_1|$.

*então o problema PVI admite solução que é também única.*

Observamos que se $f$ admite derivadas parciais respeito $y$ limitadas então $f$ será Lipschitziana respeito $y$ e $L = \max_{(x,y)\in\Omega\times\mathbb{R}} |\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)|$.

# Casos de PVI sem solução

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

- $f(x,y)$ descontinua respeito a $x$.
  Por exemplo $f(x,y) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$
- $f(x,y)$ não Lipschitziana respeito $y$ como $f(x,y) = \sqrt{|y|}$ que é definida para todo $y \in \mathbb{R}$ mas $\lim_{y \to 0} \dfrac{\partial f}{\partial y} = \infty$ ou também por $f(x,y) = \sin(y^2)$, $f(x,y) = e^y$

# Métodos numéricos para a resolução de PVI

Seja $x_0$ o ponto inicial onde é conhecido o valor $y(x_0) = y_0$ da função $y = y(x)$ procurada. Os métodos numéricos que vamos estudar vão aproximar a solução do problema de valor inicial (PVI)

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

dados uma sequencia de pontos $x_0, x_1, x_2, \ldots,$ que são equidistantes ou seja do tipo $x_{i+1} = x_i + h$ para cada $i \in \mathbb{N}$ com $h > 0$ que é a distância fixa entre os pontos.

Note que o valor da $y(x)$ em $x_0$ é dado.

Portanto em output os métodos vão achar as aproximações $y_i \approx y(x_i)$ nos pontos equidistantes $x_i$ com $i > 0$.

# Métodos de um passo e multipassos

Os métodos de um passo para resolver uma PVI no ponto $x_j$ usam o valor $y_{j-1} \approx y(x_{j-1})$ obtido no passo anterior em $x_{j-1}$, para obter a $y_j$ que aproxima o valor procurado $y(x_j)$.

Em vez, os métodos de dois passos usam $y_{j-2}, y_{j-1}$ para aproximar $y_j$. Em geral os métodos multipassos usam um $y_{j-k}, \ldots, y_{j-1}$ para obter $y_j$.

Nesta disciplina de Cálculo Numérico vamos tratar somente métodos de um passo $y_{j-1} \to y_j \to y_{j+1} \to \ldots$

a começar do método de Euler explicito

# Método de Euler explicito

Considere o problema de valor inicial $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$
o método de Euler explicito (também chamado Euler progressivo ou Forward Euler) dados os valores $(x_0, y_0)$ permite através de uma formula explicita $y_1 = \Phi_h(x_0, y_0)$ de obter uma $y_1$ que apróxima o valor $y(x_1)$ com $x_1 = x_0 + h$.
A ideia simples deste método método é de truncar a expansão de Taylor de $y(x_1)$ com base em $y(x_0)$ aos dois primeiros termos, desconsiderando o resto. Então sendo que na expansão com resto apos dois termos temos
$y(x_1) = y(x_0) + y'(x_0)(x_1 - x_0) + y''(\xi)\frac{(x_1-x_0)^2}{2}$ com $\xi \in (x_0, x_1)$
então a aproximação $y_1$ de $y(x_1)$ do método de Euler explicito é

$$y_1 = y(x_0) + y'(x_0)(x_1 - x_0)$$

Sendo que $h = x_1 - x_0$ e por definição do problema $y'(x_0) = f(x_0, y(x_0))$ e $y(x_0) = y_0$ temos

$$y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0)$$

é a expressão do método para ir de $y_0$ a $y_1$.

# Método de Euler explicito

Em geral a formula do método para ir de $y_i$ a $y_{i+1}$ é

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i).$$

Supondo de querer a solução em $x_3 = x_0 + 3h$ usando este método com o $h$ fixo, serão necessários 3 passos

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) \longrightarrow y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) \longrightarrow y_3 = y_2 + hf(x_2, y_2).$$

# Erro de truncamento local $e(x_i)$ (ou erro de um passo)

Chamaremos erro de truncamento local em $x_i$ (ou também erro de um passo), o erro de aproximação $e(x_i)$ entre $y(x_i)$ e $y_i$ (sem valor absoluto) ou seja $e(x_i) = y(x_i) - y_i$ **supondo que em todos os passos anteriores** $j < i$ **usamos** $y_j := y(x_j)$**.**

Assim é fácil ver que o erro de truncamento de Euler explicito em $x_1$ é

$$\begin{aligned} y(x_1) - y_1 &= y(x_0) + hy'(x_0) + y''(\xi_1)\tfrac{h^2}{2} - (y_0 + hf(x_0, y_0)) \\ &= y(x_0) + hf(x_0, y(x_0)) + y''(\xi_1)\tfrac{h^2}{2} - (y_0 + hf(x_0, y_0)) \\ &= y''(\xi_1)\frac{h^2}{2}, \quad \text{com } \xi_1 \in (x_0, x_1). \end{aligned}$$

Note que usamos $y(x_0) = y_0$ e $y'(x_0) = f(x_0, y(x_0)) = f(x_0, y_0)$.
No ponto geral $x_i$ temos analogamente

$$\begin{aligned} y(x_i) - y_i &= y(x_{i-1}) + hf(x_{i-1}, y(x_{i-1})) + y''(\xi_i)\tfrac{h^2}{2} - (y_{i-1} + hf(x_{i-1}, y_{i-1})) \\ &= y''(\xi_i)\tfrac{h^2}{2}, \quad \text{com } \xi_i \in (x_{i-1}, x_i). \end{aligned}$$

Note que usamos $y'(x_{i-1}) = f(x_{i-1}, y(x_{i-1})) = f(x_{i-1}, y_{i-1})$, sendo por definição do erro de truncamento temos: $y_{i-1} := y(x_{i-1})$.

# Ordem de um método numérico para a resolução de PVI

**Definição da ordem de um método para resolver PVI**

*Um método numérico para aproximar a solução $y = y(x)$ de um PVI diz-se de ter ordem* **p** *se o erro de truncamento $e(x_i) = y(x_i) - y_i$ no ponto genérico $x_i$ satisfaz:*

$$|e(x_i)| \leq ch^{\mathbf{p}+1}$$

*onde $c > 0$ é uma constante.*

Lembramos que para determinar o erro de truncamento temos de supor que $y_j = y(x_j)$ nos passos anteriores $j < i$.

Sendo que o método de Euler explicito tem $|y(x_i) - y_i| = |y''(\xi_i)|\dfrac{h^2}{2}$ então o método de Euler explicito é de primeira ordem, $p = 1$.

# Aproximar o Erro de Truncamento

Como podemos aproximar o erro de truncamento do método de Euler sem conhecer a função solução $y(x)$ do problema?

Observamos que sendo $e(x_i) = y''(\xi_i)\dfrac{h^2}{2}$, e que $y'(x) = f(x, y(x))$ podemos aproximar o valor de $y''(x)$.
Isso porque

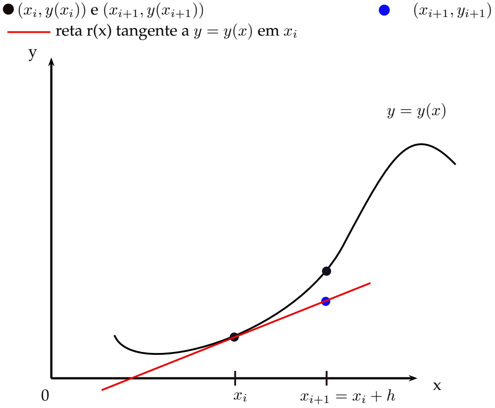
$$\begin{aligned} y''(x) &= \tfrac{d}{dx}y'(x) = \tfrac{d}{dx}f(x,y(x)) = \tfrac{\partial f}{\partial x}(x,y(x)) + \tfrac{\partial f}{\partial y}(x,y(x))\tfrac{dy}{dx}(x) \\ &= \tfrac{\partial f}{\partial x}(x,y(x)) + \tfrac{\partial f}{\partial y}(x,y(x))f(x,y(x)). \end{aligned}$$

Então podemos dizer que

$|y''(\xi_i)| \leq \max_{x,y} |\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)| + |\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)f(x,y)|$ e portanto

$$|e(x_i)| = |y''(\xi_i)|\frac{h^2}{2} \leq \frac{h^2}{2}\max_{x,y}\left(|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)| + |\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)f(x,y)|\right)$$

# Interpretação geométrica do método de Euler explícito




Observamos que $y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) = y_i + hy'(x_i)$ é o valor que toma a reta $r(x)$ no ponto $x_{i+1}$. $r(x)$ é a tangente da função $y(x)$ no ponto $(x_i, y(x_i))$ e tem equação $r(x) = y_i + y'(x_i)(x - x_i)$.
Temos então $y_{i+1} = r(x_{i+1})$.

# Outra maneira de deduzir o método de Euler

Como vamos ver na parte da integração numérica, o integral de uma função $g(x)$ em $[a, b]$ pode ser aproximado para a área do retângulo de base $b - a$ e altura $f(a)$, ou seja

$$\int_a^b g(x)dx \approx (b-a)g(a).$$

Este pode ser usado por aproximar soluções de equações diferenciais. Considera o nosso PVI $y'(x) = f(x, y)$ com $y(x_0) = y_0$ para determinar a solução exata do problema posso integrar em $[x_0, x_1]$, assim vamos obter

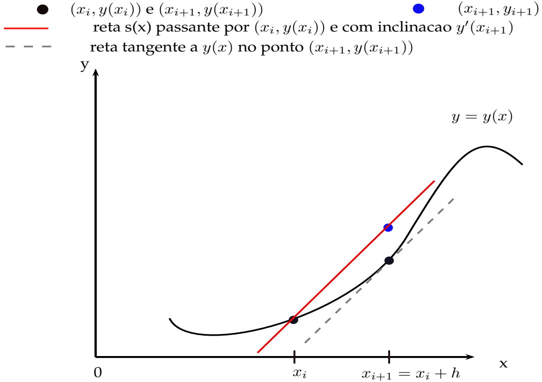
$$y(x_1)-y(x_0) = \int_{x_0}^{x_1} y'(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y(x))dx \approx (x_1-x_0)f(x_0, y_0) = hf(x_0, y_0)$$

Portanto

$$y_1 := y_0 + hf(x_0, y_0) \approx y(x_1).$$

# Método de Euler implícito (Backward Euler)

Em vez de usar a reta tangente com inclinação $y'(x_i)$ e passante por $(x_i, y(x_i))$ vamos considerar a reta $s(x)$ passante por $(x_i, y(x_i))$ e com inclinação $y'(x_{i+1})$




O **método de Euler implícito** toma como valor $y_{i+1}$ o valor que esta reta $s(x)$ toma em $x_{i+1}$: $y_{i+1} = s(x_{i+1})$

# Método de Euler implícito

Sendo que $s(x)$ tem como expressão $s(x) = y_i + y'(x_{i+1})(x - x_i)$ então obtemos

$$y_{i+1} = s(x_{i+1}) = y_i + y'(x_{i+1})(x_{i+1} - x_i) = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1}). \quad (1)$$

Portanto o método de Euler implícito é

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_{i+1}, y_{i+1}).$$

Para obter este expressão do método usamos em (1) a equação do problema $y'(x) = f(x, y(x))$, a relação $x_{i+1} - x_i = h$, e que substituímos $y(x_{i+1})$ (que é desconhecida) com o seu aproximante $y_{i+1}$ no argumento da $f$.

# Erro de truncamento do método de Euler implícito

Expandendo em serie de Taylor, $y(x_0)$ respeito ao ponto $x_1$, obtemos
$y(x_0) = y(x_1) + (x_0 - x_1)y'(x_1) + \frac{(x_0 - x_1)^2}{2} y''(\xi_1)$
e então
$y(x_1) = y(x_0) + (x_1 - x_0)y'(x_1) - \frac{(x_1 - x_0)^2}{2} y''(\xi_1)$.
Supondo $y(x_0) = y_0$, obtemos o erro de truncamento no ponto $x_1$ do método de Euler implícito que tem $y_1 = y_0 + hf(x_1, y_1)$
$e(x_1) = y(x_1) - y_1 =$
$y(x_0) + (x_1 - x_0)y'(x_1) - \frac{(x_1 - x_0)^2}{2} y''(\xi_1) - (y_0 + hf(x_1, y_1)) = -y''(\xi_1)\frac{h^2}{2}$.
Sendo que

$$e(x_1) = -y''(\xi_1)\frac{h^2}{2} \quad \text{com} \xi_1 \in (x_0, x_1)$$

obtemos que o método de Euler implícito é de ordem 1, como o método de Euler explicito.

# Resolução de um método implícito

Um método implícito não pode ser resolvido diretamente aplicando uma formula porque a incógnita não é já isolada. Em vez nos métodos explícitos, como é método de Euler explicito, a incógnita $y_{i+1}$ e' já bem determinada e isolada da formula do método $y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$.
No caso de Euler implícito em vez $y_{i+1}$ encontra se no primeiro membro mas também como argumento da $f$,

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1})$$

Note que esta é uma equação não linear em $y_{i+1}$ se $f(x, y)$ for não linear em $y$.
Por isso para obter $y_{i+1}$ podemos usar um métodos dos zeros, e se este método convergir chegaremos a uma aproximação de $y_{i+1}$.
Este processo tem de ser repetido em cada passo até chegar a $y_k$ desejada

# Exemplo

Dado o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = \sin(y) \\ y(2) = 3 \end{cases}$$

Seja $h = 0.5$, queremos determinar a aproximação $y_1$ de $y(x_1)$. Notamos que $x_1 = 2 + h = 2.5$,
$y_1 = y_0 + hf(x_1, y_1) = y_0 + h\sin(y_1) = 3 + 0.5\sin(y_1)$. A equação não linear $y_1 = 3 + 0.5\sin(y_1)$ pode ser resolvida com o método do ponto fixo, porque está já escrita na forma $y_1 = \varphi(y_1)$.
Então $y_1$ é o ponto fixo de $\varphi(y) = 3 + 0.5\sin(y)$.
O método do ponto fixo $y_1^{(k+1)} = \varphi(y_1^{(k)})$ converge?
Vamos verificar onde $|\varphi'(y)| < 1$:
$|\varphi'(y)| = 0.5|\cos(y)| < 1$ este acontece sempre porque
$0.5 \cdot |\cos(y)| \leq 0.5 < 1$ para cada $y \in \mathbb{R}$.
Então para cada $y_1^{(0)} \in \mathbb{R}$ obtemos $\lim_{k\to\infty} y_1^{(k)} = y_1$. Claramente aplicaremos o método do ponto fixo para um número finito de passos então não obteremos o $y_1$ teórico mas uma sua aproximação $y_1^{(k)} \approx y_1$.

# Uso do método do ponto fixo para obter um passo do método de Euler implícito

Para aproximar a solução de $y_1 = y_0 + hf(x_1, y_1)$
com o método do ponto fixo

$$y_1^{(k+1)} = \varphi(y_1^{(k)}) = y_0 + hf(x_1, y_1^{(k)}),$$

temos analisar a derivada $\varphi'(y) = h\frac{\partial}{\partial y}f(x_1, y)$ e encontrar um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ tal que

$$h|\frac{\partial}{\partial y}f(x_1, y)| < 1 \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Notamos que esta condição ($|\varphi'(y)| < 1$) garante a convergência se este intervalo contem também o ponto fixo e se tomamos $y_1^{(0)} \in I$.

As vezes é possível ter a situação ideal $I = \mathbb{R}$, mas isso dependerá da $h$ escolhida.
Se conseguimos por exemplo achar o maximo $M = \max_y |\frac{\partial}{\partial y} f(x_1, y)|$, podemos ter certeza que, por cada $h < \frac{1}{M}$, o método do ponto fixo convergirá, por cada $y_1^{(0)}$ escolhida, porque teremos

$$h|\frac{\partial}{\partial y} f(x_1, y)| \leq hM < 1.$$

No caso anterior $f(x, y) = sin(y)$ tem $M = \max_y |\frac{\partial}{\partial y} f(x_1, y)| = 1$ e portanto cada vez que use o método implícito com $h < 1$ vai poder achar a $y_1$ usando o método do ponto fixo $y_1^{(k+1)} = y_0 + hf(x_1, y_1^{(k)})$ partindo de uma qualquer $y_1^{(0)} \in \mathbb{R}$.

# Método de Crank-Nicolson (ou dos trapézios)

Este método pode ser visto como se for obtido fazendo uma média em cada passo do método explicito e do implícito. Isso porque o método de Crank-Nicolson tem a forma

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}))$$

Note então que é como se somamos a formula de Euler explicito $y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$ e de $y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1})$ e dividimos por dois.

Note que é também um método implícito sendo que a expressão de $y_{i+1}$ não aparece isolada mas é também argumento da $f$ que em geral pode ser não linear.

# Uso do método do ponto fixo para obter um passo do método de Crank-Nicolson

Uma análise similar ao que foi feito para Euler implícito pode ser feita para este método. Neste caso teremos que o intervalo de convergência do método do ponto fixo

$$y_{i+1}^{(k+1)} = y_i + \frac{h}{2}(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(k)}))$$

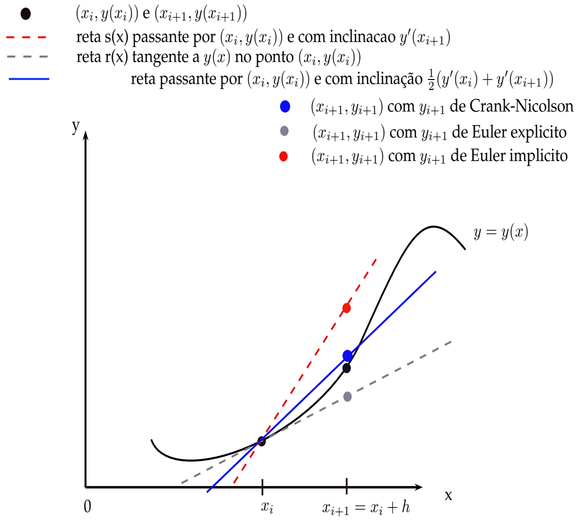
será $I = \mathbb{R}$ se $h < \frac{2}{M}$ onde $M = \max_y |\frac{\partial}{\partial y} f(x_{i+1}, y)|$.

# Interpretação geométrica do método de Crank-Nicolson

Sendo que Crank-Nicolson se obtém como a media entre
Euler explicito, $y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$,
e Euler implícito, $y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1})$,

a sua iteração $y_{i+1}$ é obtida graficamente através a reta passante por $(x_i, y_i)$ e com inclinação (coeficiente angular) que é a média do coeficiente angular $y'(x_i)$ da reta $r(x)$ usada no Euler explicito e do coeficiente angular $y'(x_{i+1})$ da reta $s(x)$ do método de Euler implícito.

# Interpretação geométrica do método de Crank-Nicolson



# Erro de truncamento e ordem do método de Crank-Nicolson

É possível provar que para o método de Crank-Nicolson o erro de truncamento local é dado para cada $i$ da formula

$$e(x_i) = y(x_i) - y_i = -y'''(\xi_i)\frac{h^3}{12},$$

onde $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$. Portanto, como esperado da interpretação gráfica, Crank-Nicolson é um método mais acurado para $h$ pequeno respeito aos métodos de Euler.

Crank-Nicolson é um método de segunda ordem.