

# Método iterativos para a resolução de sistemas lineares. Método de Jacobi e de Gauss-Seidel

MS211 – Cálculo Numérico

Giuseppe Romanazzi

27 Outubro 2020

# Introdução

Nesta aula concluiremos a análise dos critérios que garantem a convergência do método de Jacobi. Depois apresentaremos o método iterativo de Gauss-Seidel para a resolução de sistemas lineares quadrados  $Ax = b$ . Este método resulta ser, na sua implementação, similar ao método de Jacobi, mas é na maioria dos casos mais rápido do método de Jacobi.

A construção deste método vem de um diferente splitting da matriz  $A$  respeito aquele utilizado no método de Jacobi.

Daremos alguns critérios para ter a convergência deste método. Apresentaremos também os algoritmos dos métodos de Jacobi e Gauss Seidel e comparemos assim os dois métodos.

# Conteúdo

- 1 Método de Jacobi
  - Convergência do método de Jacobi
  
- 2 Métodos iterativo de Gauss Seidel
  - Comparação na implementação respeito o método de Jacobi.
    - Algoritmos
  - Convergência

# Método de Jacobi, revisão

A expressão explícita do método escrito pode ser escrita na forma vetorial como  $x^{(k+1)} = G_J x^{(k)} + c_J = (I - D^{-1}A)x^{(k)} + D^{-1}b$  e na forma escalar explícita como

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

por cada  $i = 1, \dots, n$ .

# Critério das linhas, condição suficiente para a convergência

## Definição

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  diz-se com diagonal estritamente dominante por linhas (ou que satisfaz o critério das linhas) se e só se  $|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|$  por cada  $i = 1, \dots, n$

## Proposição (1ª condição suficiente para a convergência)

Se a matriz  $A$  for com diagonal estritamente dominante por linhas (ou equivalentemente se satisfazer o critério das linhas) então o método de Jacobi converge.

# Critério das colunas: outra condição suficiente para convergência do método de Jacobi

## Definição

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  diz-se que tem a diagonal estritamente dominante por colunas (ou que satisfaz o critério das colunas) se

$$|a_{jj}| > \sum_{i=1, i \neq j}^n |a_{ij}|, \quad \text{por cada } j = 1, \dots, n$$

## Proposição 2ª Condição suficiente para a convergência

Se a matriz  $A$  for com diagonal estritamente dominante por colunas (ou equivalentemente se satisfaz o critério das colunas) então o método de Jacobi converge.

## Demonstração.

Prova se que a hipótese implica que  $\|G_J\|_1 < 1$  e portanto o método de Jacobi converge. Porque cada método  $x_{k+1} = Gx_k + c$  com  $\|G\| < 1$  converge. □

# Exemplo de sistema que satisfaz o critério das colunas

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - 6x_2 + 2x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 4 \end{cases}$$

Note que este sistema não satisfaz o critério das linhas porque

$$|a_{11}| = 3 \not> |a_{12}| + |a_{13}| = 5,$$

mas satisfaz o critério das colunas porque

$$|a_{11}| = 3 > |a_{21}| + |a_{31}| = 1 + 1 = 2;$$

$$|a_{22}| = 6 > |a_{12}| + |a_{32}| = 4 + 1 = 5;$$

$$|a_{33}| = 4 > |a_{13}| + |a_{23}| = 1 + 2 = 3.$$

Portanto o método de Jacobi convergirá.

# Diagonal dominante por linhas não estritamente (critério das linhas fraco)

## Definição

Uma matriz  $A$  tem a diagonal dominante por linhas (critério das linhas fraco) se por cada  $i = 1, \dots, n$  tem

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|$$

e se ao mesmo tempo existir pelo menos um  $s = 1, \dots, n$  tal que

$$|a_{ss}| > \sum_{j=1, j \neq s}^n |a_{sj}|$$

Veja que a matriz  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & -3 \\ 2 & -3 & 6 \end{pmatrix}$  é diagonal dominante por linha

com  $s = 2, 3$ , mas não estritamente, porque

$$|a_{11}| = 2 = |a_{12}| + |a_{13}| = 2,$$

$$|a_{22}| = 5 > |a_{21}| + |a_{23}| = 4$$

$$|a_{33}| = 6 > |a_{31}| + |a_{32}| = 5$$



# Diagonal dominante por colunas não estritamente

## Definição

Uma matriz  $A$  diz-se que tem a diagonal dominante por colunas (critério das colunas fraco) se por cada  $j = 1, \dots, n$  tem

$$|a_{jj}| \geq \sum_{i=1, i \neq j}^n |a_{ij}|$$

e se ao mesmo tempo existir pelo menos um  $s = 1, \dots, n$  tal que

$$|a_{ss}| > \sum_{i=1, i \neq s}^n |a_{is}|$$

## 3ª Condição suficiente para a convergência do método de Jacobi

### Proposição 3ª Condição suficiente para a convergência

*Se a matriz  $A$  tem todos os coeficientes não nulos e se for com diagonal dominante por linhas ou por colunas (ou equivalentemente se satisfaz o critério das linhas ou das colunas fraco) então o método de Jacobi converge.*

Exemplo:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 - 4x_2 = -6 \end{cases}$$

A matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$  do sistema satisfaz o critério das linhas fraco, e tem todos os  $a_{ij} \neq 0$  portanto é esperado que o método de Jacobi convirja.

Resolvendo o sistema com  $\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 - 4x_2 = -6 \end{cases}$  com Jacobi:

Tomamos por facilidade nos cálculos  $x^{(0)} = (0, 0)^t$ ,

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(0)}) = 4$$

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(0)}) = \frac{6}{4} = 1.5$$

$$x_1^{(2)} = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(1)}) = \frac{1}{1}(4 - 1.5) = 2.5$$

$$x_2^{(2)} = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(1)}) = -\frac{1}{4}(-6 - 4) = 2.5$$

$$x_1^{(3)} = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(2)}) = 1.5$$

$$x_2^{(3)} = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(2)}) = \frac{17}{8}$$

$$x_1^{(4)} = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(3)}) = \frac{15}{8} \approx 2$$

$$x_2^{(4)} = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(3)}) = \frac{15}{8} \approx 2$$

Portanto notamos que o método de Jacobi está convergindo a solução teórica  $x = (2, 2)^t$ .

Se considerássemos o seguinte sistema com a mesma solução

$$x = (2, 2)^t$$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 = -6 \\ x_1 + x_2 = 4 \end{cases}$$

Notamos que não satisfaz nenhum dos três critérios de colunas ou linhas vistos.

Se mesmo assim aplicássemos o método de Jacobi obteremos, partindo de  $x^{(0)} = (0, 0)^t$  :

$$x^{(1)} = (-2, 3)^t$$

$$x^{(2)} = (6, 6)^t$$

$$x^{(3)} = (18, -2)^t$$

$$x^{(4)} = (-14, 14)^t$$

Então o método de Jacobi não está convergindo a solução certa do sistema. Os vetores  $x^{(k)}$  estão crescendo sempre mais indo sempre mais longe da solução certa. Os  $x^{(k)}$  estão divergindo.

# Métodos iterativo de Gauss Seidel, Splitting

O método iterativo de Gauss Seidel é ainda do tipo

$$x^{(k+1)} = Gx^{(k)} + c,$$

e tal que o ponto fixo de  $\varphi(x) = Gx + c$  é a solução do sistema linear  $Ax = b$ .

A diferença entre este método e o método de Jacobi está na escolha da matriz de iteração  $G$  e do vetor  $c$ .

Usaremos agora o splitting  $A = D + L + U$  onde  $D$  é a matriz diagonal de  $A$ ,  $L$  é a parte triangular inferior, e  $U$  é a parte triangular superior de  $A$ :

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & & & & \\ & a_{22} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_{21} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn-1} & 0 \end{pmatrix},$$

$$U = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & a_{n-1n} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}, \text{ Note que } L \text{ e } U \text{ tem } 0 \text{ na diagonal principal}$$

# Splitting $A = (D + L) + U$ , construção do método de Gauss-Seidel (GS)

Note que se for  $a_{ii} \neq 0$  por cada  $i = 1, \dots, n$ , então a matriz  $D + L$  tem

$$\det(D + L) = \prod_{i=1}^n a_{ii} \neq 0,$$

portanto  $(D + L)$  é o adendo do splitting de  $A$  não invertível então de  $(D + L + U)x = b$  obtemos  $(D + L)x = -Ux + b$  e multiplicando por a inversa de  $D + L$  obtemos  $x = -(D + L)^{-1}Ux + (D + L)^{-1}b$ .

Portanto com  $G_{GS} := -(D + L)^{-1}U$  e  $c_{GS} := (D + L)^{-1}b$  o método de Gauss-Seidel é

$$x^{(k+1)} = G_{GS}x^{(k)} + c_{GS}$$

# Varias formas da matriz de iteração $G_{GS}$ . Comparação com o método de Jacobi

$$G_{GS} = -(D + L)^{-1}U$$

Sendo que  $U = A - (D + L)$ , temos que

$$-(D + L)^{-1}U = -(D + L)^{-1}(A - (D + L)) = I - (D + L)^{-1}A$$

portanto tem esta outra forma da matriz de iteração

$$G_{GS} = I - (D + L)^{-1}A.$$

Note a similaridade entre as matrizes e os vetores dos métodos de Jacobi e Gauss-Seidel

<i>Jacobi</i>		<i>Gauss - Seidel</i>
$G_J = I - D^{-1}A$		$G_{GS} = I - (D + L)^{-1}A$
$c_J = D^{-1}b$		$c_{GS} = (D + L)^{-1}b$

## Forma do método com resíduo

Sabemos que um método iterativo  $x^{(k+1)} = Gx^{(k)} + c$  pode ser escrito em função do resíduo:  $x^{(k+1)} = x^{(k)} + (I - G)A^{-1}r^{(k)}$ , onde  $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$  é o resíduo ao passo  $k$ .

No caso de Gauss Seidel com  $G = I - (D + L)^{-1}A$  obtemos a expressão do método com resíduo:

$$x_{GS}^{(k+1)} = x_{GS}^{(k)} + (D + L)^{-1}r^{(k)}$$

Em vez o método de Jacobi é

$$x_J^{(k+1)} = x_J^{(k)} + D^{-1}r^{(k)}$$



# Forma escalar do método de Gauss-Seidel

Usando as expressões  $G_{GS} = -(D + L)^{-1}U$ ,  $c_{GS} = (D + L)^{-1}b$ , e do método

$$x^{(k+1)} = G_{GS}x^{(k)} + c_{GS},$$

obtemos, multiplicando por  $D + L$ ,

$$(D + L)x^{(k+1)} = -Ux^{(k)} + b$$

e por isso linha por linha obtemos  $((D + L)x^{(k+1)})_i = (b - Ux^{(k)})_i$ ;

Notamos que  $(D + L)_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & i \geq j \\ 0 & i < j \end{cases}$

Portanto por  $i = 1, \dots, n$ , temos

$$a_{ii}x_i^{(k+1)} + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} = b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)}$$

e então isolando  $x_i^{(k+1)}$  no primeiro membro, obtemos

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} \right)$$

# Forma escalar do método de Gauss-Seidel

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - \dots - a_{1n}x_n^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - \dots - a_{2n}x_n^{(k)}) \\ \dots \\ x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)}\right) \\ \dots \\ x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1^{(k+1)} - a_{n2}x_2^{(k+1)} - \dots - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k+1)}) \end{cases}$$

Micro-passos dentro o passo  $(k + 1)$  do método

- 1) Obtemos antes  $x_1^{(k+1)}$  usando os  $x_i^{(k)}$  com  $i = 1, \dots, n$ ;
- 2) Obtemos  $x_2^{(k+1)}$  usando  $x_1^{(k+1)}$  e  $x_j^{(k)}$  com  $j = 2, \dots, n$
- ...
- $i$ ) Obtemos  $x_i^{(k+1)}$  usando  $x_j^{(k+1)}$  anteriores ( $j = 1, \dots, i - 1$ ) e os  $x_j^{(k)}$  com  $j = i + 1, \dots, n$
- ...
- $n$ ) Computamos  $x_n^{(k+1)}$  usando os  $x_j^{(k+1)}$  com  $j = 1, \dots, n - 1$

# Forma escalar do método de Jacobi

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} \dots - a_{1n}x_n^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} \dots - a_{2n}x_n^{(k)}) \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} \dots - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k)}) \end{cases}$$

Posso computar  $x_i^{(k+1)}$  sem esperar de computar os outros  $x_j^{(k+1)}$  com  $j \neq i$ ,  
é um método vetorial, tem uma rápida execução nos computadores.

# Algoritmo de Jacobi

---

**Algorithm 1** Algoritmo do passo  $k + 1$  de Jacobi

---

**Require:**  $y = x^{(k)}$ ,  $A = (a_{ij})$ ,  $b = (b_i)$ **for**  $i = 1, \dots, n$  **do** $x_i \leftarrow b_i;$ **for**  $j = 1, \dots, i - 1$  **do** $x_i \leftarrow x_i - a_{ij}y_j;$ **end for****for**  $j = i + 1, \dots, n$  **do** $x_i \leftarrow x_i - a_{ij}y_j;$ **end for** $x_i \leftarrow x_i / a_{ii};$ **end for****Output:**  $x$ ▷ Se  $i = 1$  este ciclo não tem efeito

# Algoritmo de Gauss Seidel

---

**Algorithm 2** Algoritmo do passo  $k + 1$  de Gauss-Seidel

---

**Require:**  $x = x^{(k)}$ ,  $A = (a_{ij})$ ,  $b = (b_i)$

**for**  $i = 1, \dots, n$  **do**

$x_i \leftarrow b_i$ ;

**for**  $j = 1, \dots, i - 1$  **do**

$x_i \leftarrow x_i - a_{ij}x_j$ ;

**end for**

**for**  $j = i + 1, \dots, n$  **do**

$x_i \leftarrow x_i - a_{ij}x_j$ ;

**end for**

$x_i \leftarrow x_i / a_{ii}$ ;

**end for**

**Output:**  $x$

---

▷ Se  $i = 1$  este ciclo não tem efeito

## Exercício

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$$

achamos uma solução com um erro relativo  $d_r$  entre duas aproximações consecutivas menor da tolerância  $\varepsilon = 0.05$ .

Usamos  $x^{(0)} = (0, 0, 0)^t$ , em cada passo

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{5}(5 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)}) = \frac{1}{5}(5 - x_2^{(k)} - x_3^{(k)})$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{4}(6 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)}) = \frac{1}{4}(6 - 3x_1^{(k+1)} - x_3^{(k)})$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{6}(0 - a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)}) = \frac{1}{6}(0 - 3x_1^{(k+1)} - 3x_2^{(k+1)}).$$

No primeiro passo  $k = 0$  obtemos:

$$x_1^{(1)} = \frac{5}{5} = 1, \quad x_2^{(1)} = 1.5 - \frac{3}{4} - 0 = \frac{3}{2} - \frac{3}{4} = \frac{3}{4} = 0.75$$

$$x_3^{(1)} = -0.5 \cdot 1 - \frac{0.75}{2} = -\frac{7}{8} = -0.875$$

$$d_r^{(1)} = \frac{\max_{i=1,\dots,n} |x_i^{(1)} - x_i^{(0)}|}{\max_{i=1,\dots,n} |x_i^{(1)}|} = \frac{1}{1} = 1 > \varepsilon.$$

No segundo passo  $k = 1$  obtemos

$$x_1^{(2)} = 1 - 0.2 \cdot 0.75 + 0.2 \cdot 0.875 = 1.025$$

$$x_2^{(2)} = 1.5 - 0.75 \cdot 1.025 + 0.25 \cdot (0.875) = 0.95$$

$$x_3^{(2)} = -0.5 \cdot 1.025 - 0.5 \cdot 0.95 = -0.9875.$$

Notamos que

$$|x_1^{(2)} - x_1^{(1)}| = 0.025; |x_2^{(2)} - x_2^{(1)}| = 0.2; |x_3^{(2)} - x_3^{(1)}| = -0.1125$$

$$\text{portanto } d_r^{(2)} = \frac{\max_{i=1,\dots,n} |x_i^{(2)} - x_i^{(1)}|}{\max_{i=1,\dots,n} |x_i^{(2)}|} = \frac{0.2}{1.025} = 0.1951 > \varepsilon.$$

No terceiro passo  $x_1^{(3)} = 1.0075$ ,  $x_2^{(3)} = 0.9912$ ,  $x_3^{(3)} = -0.9993$  e

$$\text{temos } d_r^{(3)} = \frac{\max(0.0175, 0.0412, 0.0118)}{1.0075} = 0.0409 < \varepsilon.$$

A solução achada é  $x = (1.0075, 0.9912, -0.9993)$

# Condições suficientes para garantir a convergência

As seguintes três condições garantem a convergência do método de Gauss-Seidel

- A tem diagonal estritamente dominante por linhas, ou seja

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| \quad (\text{critério das linhas})$$

- A tem todos os coeficientes não nulos e tem a diagonal dominante

por linhas, ou seja  $|a_{ii}| \geq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|$  e existe  $s$  tal que

$$|a_{ss}| > \sum_{j=1, j \neq s}^n |a_{sj}| \quad (\text{critério das linhas fraco})$$

- A satisfaz o critério de Sassenfeld:  $|\beta_i| < 1$ , por cada  $i = 1, \dots, n$

$$\text{onde } \beta_1 = \sum_{j=2}^n \frac{|a_{1j}|}{|a_{11}|}, \quad \beta_i = \frac{\sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| \beta_j + \sum_{j=i+1}^n |a_{ij}|}{|a_{ii}|}, \quad i = 2, \dots, n$$

Note que o critério das linhas é um subcaso do critério de Sassenfeld.

Portanto as matrizes que satisfazem o critério de Sassenfeld são mais daqueles que satisfazem o critério das linhas.



# Propriedades dos $\beta_i$ , Redução do erro, e convergência com o critério de Sassenfeld

Considere os  $\beta_i$  do critério de Sassenfeld

$$\beta_1 = \sum_{j=2}^n \frac{|a_{1j}|}{|a_{11}|}, \quad \beta_i = \frac{\sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| \beta_j + \sum_{j=i+1}^n |a_{ij}|}{|a_{ii}|}, \quad i = 2, \dots, n$$

Sejam  $\{x_i^{(k)}\}$  as iterações obtidas do método de Gauss-Seidel, denotamos os erros no passo  $k$ :  $e_i^{(k)} := x_i^{(k)} - x_i$ ,  
 $E^{(k)} := \max_{i=1, \dots, n} |e_i^{(k)}| = \|e^{(k)}\|_\infty$ .

Os  $\beta_i$  de Sassenfeld permitem de achar como variam os erro  $e_i^{(k+1)}$  das componente  $i$  no passo  $k + 1$  em função do erro  $E^{(k)}$ :

$$|e_i^{(k+1)}| \leq \beta_i E^{(k)} \text{ por cada } i = 1, \dots, n$$

e por isso vale sempre que  $E^{(k+1)} \leq \beta E^{(k)}$

onde  $\beta = \max_{i=1, \dots, n} \beta_i$ . Estes desigualdades em cima valem sempre

(independente se os  $\beta_i$  foram menores de 1).

# Propriedades dos $\beta_i$ , Redução do erro, e convergência com o critério de Sassenfeld

Se valesse o critério de Sassenfeld (ou seja  $\beta < 1$ ) teremos a redução na norma do máximo dos erros em cada passo

$$E^{(k+1)} \leq \beta E^{(k)} < E^{(k)}$$

e teremos convergência porque  $E^{(k)} \leq \beta^k E^{(0)}$  e portanto  $\lim_{k \rightarrow \infty} E^{(k)} = 0$ . Note que este implicaria  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_i^{(k)} = x_i$  e portanto teremos a convergência do método:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x.$$

# Exemplo

Considere o sistema

$$\begin{cases} x_1 + 0.5x_2 - 0.1x_3 = 0.2 \\ 0.2x_1 + x_2 - 0.2x_3 = -2 \\ -0.1x_1 - 0.2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\beta_1 = \frac{|a_{12}| + |a_{13}|}{|a_{11}|} = \frac{0.5 + 0.1}{1} = 0.6 < 1$$

$$\beta_2 = \frac{|a_{21}|\beta_1 + |a_{23}|}{|a_{22}|} = \frac{0.2 * 0.6 + 0.2}{1} = 0.32 < 1$$

$$\beta_3 = \frac{|a_{31}|\beta_1 + |a_{32}|\beta_2}{|a_{33}|} = \frac{0.1 * 0.6 + 0.2 * 0.32}{1} = 0.124 < 1$$

Então o critério de Sassenfeld é satisfeito e por isso o método de Gauss-Seidel aplicado a este sistema linear convergirá.

## E se não valer o critério de Sassenfeld...

As vezes é suficiente trocar as equações e as incógnitas do sistema para ter um sistema que satisfaz o critério de Sassenfeld. Por exemplo

$$\begin{cases} 2x_1 & +x_2 & +3x_3 & = 9 \\ & -x_2 & +x_3 & = -2 \\ -x_1 & & +3x_3 & = 3 \end{cases}$$

tem  $\beta_1 = \frac{1+3}{2} = 2 > 1$ .

Observamos que trocando a primeira com a terceira equação e a primeira coluna (ou a primeira variável  $x_1$ ) com a terceira coluna obtemos um sistema do tipo

$$\begin{cases} 3x_3 & & -x_1 & = 3 \\ x_3 & -x_2 & & = -2 \\ 3x_3 & +x_2 & +2x_1 & = 9 \end{cases}$$

tem  $\beta_1 = \frac{1}{3} < 1$ ,  $\beta_2 = \frac{\frac{1}{3}}{1} = \frac{1}{3} < 1$   
 $\beta_3 = \frac{1}{2}(3\frac{1}{3} + 1\frac{1}{3}) = \frac{1}{2}(\frac{4}{3}) = \frac{2}{3} < 1$ .

Se também por cada troca o critério não valesse, não se pode garantir a convergência do método.

# Computar os $\beta_i$ no algoritmo de Gauss Seidel

Note que os  $\beta_i$  podem ser computados dentro o seu algoritmo de Gauss-Seidel adicionando linhas nos ciclos

```
"for"  $j = 1, \dots, i - 1, i + 1, \dots, n$ 
```

```
   $\beta_i \leftarrow 0$ 
```

```
  for  $j = 1, \dots, i - 1$  do
```

```
    ...
```

```
     $\beta_i \leftarrow \beta_i + |a_{ij}| \beta_j$ 
```

```
  end for
```

```
  for  $j = i + 1, \dots, n$  do
```

```
    ...
```

```
     $\beta_i \leftarrow \beta_i + |a_{ij}|$ 
```

```
  end for
```

```
   $\beta_i \leftarrow \frac{\beta_i}{|a_{ii}|}$ 
```

Se algum  $\beta_i$  for maior de 1 poderemos forçar a paragem por falta de garantia da convergência. Se bem o método poderia ainda convergir...

## Critério das linhas

Se  $A$  satisfaz o critério das linhas então o método de Gauss Seidel converge, note que isso acontece porque

critério das linhas  $\rightarrow$  critério de Sassenfeld

Isso porque se  $A$  for com diagonal dominante por linhas estritamente (ou se satisfaz o critério das linhas):

- 1 Na primeira linha temos  $|a_{11}| > \sum_{j=2}^n |a_{1j}|$  e isso implica  $\beta_1 < 1$
- 2 Na segunda linha  $\frac{|a_{21}|\beta_1 + \sum_{j=3}^n |a_{2j}|}{|a_{22}|} < \frac{|a_{21}| + \sum_{j=3}^n |a_{2j}|}{|a_{22}|} < 1$ , a última desigualdade é válida sendo que por a dominação da diagonal na segunda linha teremos  $|a_{22}| > |a_{21}| + \sum_{j=3}^n |a_{2j}|$
- 3 ...

Mas existem também sistemas que não satisfazem o critério das linhas mas que satisfazem o critério de Sassenfeld

$$\begin{cases} 3x_1 & & -x_3 & = 3 \\ x_1 & -x_2 & & = 1 \\ 3x_1 & +x_2 & +2x_3 & = 9 \end{cases}$$

$$\beta_1 = \frac{|a_{12}|+|a_{13}|}{|a_{11}|} = \frac{1}{3} < 1$$

$$\beta_2 = \frac{|a_{21}|\beta_1+|a_{23}|}{|a_{22}|} = \frac{\frac{1}{3}}{1} = \frac{1}{3} < 1$$

$$\beta_3 = \frac{1}{2}(|a_{31}|\beta_1 + |a_{32}|\beta_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{2}{3} < 1$$