MS211, Cálculo Numérico, Turmas L, M
Segundo Semestre de 2020, UNICAMP

Resolução Atividade 07

Entrega SOMENTE por Google Classroom até terça-feira 22/12/2020.

Os exercícios podem ser desenvolvidos em grupos de até dois membros. Escreva os nomes e os RA dos membros do grupo em todas as folhas, com destaque na primeira página. É aconselhável que somente um membro, por grupo, faça a entrega da atividade completa do grupo no Google Classroom. Nesta atividade pode-se utilizar cálculos via programação computacional, ou via cálculo manual, a critério dos estudantes. Mas em qualquer caso, usar formato PDF único na entrega.

(1) Considere a seguinte sequência de valores observados:

x	-10	-9	-8	-6	-5	-3	-2	0	2	3	4	5	6	8	9	10
f(x)	13.6	9.76	7.03	8.84	9.87	4.57	1.27	2	2.7	-0.57	-4.27	-5.87	-4.84	-3.0	-5.76	-9.63

Utilizando a metodologia da **interpolação polinomial**, pede-se desenvolver os itens:

(a) Usando a **forma polinomial de Newton**, encontre as parábolas interpoladoras em cada tripla de pontos consecutivos $(x_k, f(x_k))$ com $k = i, i+1, i+2$. Na última dupla de pontos $(9, -5.76)$ $(10, -9.63)$ determine a reta interpoladora.

(b) Usando a **forma de interpolação de Lagrange**, encontre o polinômio interpolador associado à primeira tripla de pontos consecutivos $(x_k, f(x_k))$ (da esquerda para a direita). Verifique que se obtêm o mesmo polinômio pela forma de Newton.

(c) Faça um esboço das parábolas e da reta interpoladoras calculadas no item (1.a).

(2) Usando a tabela do item anterior (1) e o desenvolvimento do item (1.a), pede-se:

(a) Estime em cada subintervalo o erro de interpolação. Efetue a média e diga que erro cometeu ao calcular a curva f com a estratégia de interpolação do item 1.a.

(b) Estime o valor da f em $x = 1$ usando a curva interpoladora calculada no item (1.a).

(c) Suponha que são conhecidos mais novos pontos da f em cada subintervalo dos pontos observados na tabela do item (1), por exemplo, na localização do ponto médio correspondente. Assim, seria possível calcular uma melhor curva que aproxime a f? Motive a sua resposta por meio de uma análise do erro. **Dica:** Utilize os resultados teóricos sobre o erro de interpolação polinomial.

(d) Existe algum processo de interpolação (polinomial) que converge para uma função f? Motive a sua resposta por meio de uma análise do erro de interpolação polinomial. **Dica:** Considere a situação do processo de interpolação polinomial em vista da distribuição dos pontos observados que podem ser escolhidos no processo como *pontos equidistantes* ou *pontos não equidistantes*.

Resolução (1):

(a) Individuamos sete triplas de nós consecutivos do tipo (a, c, b) donde construiremos as parábolas interpolantes: $(-10, -9, -8)$, $(-8, -6, -5)$, $(-5, -3, -2)$, $(-2, 0, 2)$, $(2, 3, 4)$, $(4, 5, 6)$, $(6, 8, 9)$. Mais temos um par de nós $(9, 10)$ donde deixaremos passar uma reta interpoladora.

parábola 1: Construímos a parábola pelos pontos de interpolação $(x_0, f(x_0)) = (-10, 13.6)$, $(x_1, f(x_1)) = (-9, 9.76)$, $(x_2, f(x_2)) = (-8, 7.03)$. Utilizamos a forma Newton

$$par(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

que necessita as diferenças divididas $f[x_0, x_1]$, $f(x_0, x_1, x_2]$ obtidas usando a seguinte tabela

x_k	$f(x_k)$	dd1	dd2
-10	13.6		
-9	9.76	-3.84	
-8	7.03	-2.73	0.555

portanto a parábola 1 é $par_1(x) = 13.6 - 3.84 * (x + 10) + 0.555 * (x + 10)(x + 9) = 13.6 - 38.4 + 0.555 * 90 + (-3.84 + 19 * 0.555)x + 0.555x^2$, então

$$par_1(x) = 0.555x^2 + 6.705x + 25.15$$

parábola 2: Utilizamos a segunda tripla de pontos $(x_0, f(x_0)) = (-8, 7.03)$, $(x_1, f(x_1)) = (-6, 8.84)$, $(x_2, f(x_2)) = (-5, 9.87)$. Utilizamos a forma Newton

$$par_2(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

x_k	$f(x_k)$	dd1	dd2
-8	7.03		
-6	8.84	0.905	
-5	9.87	1.03	0.0417

A parábola 2 é $par_2(x) = 7.03 + 0.905 * (x + 8) + 0.0417 * (x + 8)(x + 6) = 7.03 + 0.905*8+0.0471*48+(0.905+14*0.0417)x+0.0417x^2 = 16.27+1.4883x+0.0417x^2$. Então

$$par_2(x) = 0.0417x^2 + 1.4883x + 16.27$$

parábola 3:

x_k	$f(x_k)$	dd1	dd2
-5	9.87		
-3	4.57	-2.65	
-2	1.27	-3.30	-0.2167

A parábola 3 é $par_3(x) = 9.87 - 2.65 * (x + 5) - 0.2167 * (x + 5)(x + 3) = 9.87 - 2.65 *$

$5 - 0.2167 * 15 + (-2.65 - 8 * 0.2167)x - 0.2167x^2 = -6.630 - 4.3833x - 0.2167x^2$.
Então

$$par_3(x) = -0.2167x^2 - 4.3833x - 6.630$$

parábola 4:

x_k	$f(x_k)$	dd1	dd2
-2	1.27		
0	2	0.365	
2	2.7	0.35	-0.0037

A parábola 4 é $par_4(x) = 1.27 + 0.365 * (x + 2) - 0.0037 * x(x + 2) = 1.27 + 0.365 * 2 + (0.365 - 0.0037 * 2)x - 0.0037x^2 = 2 + 0.3575x - 0.0037x^2$. Então

$$par_4(x) = -0.0037x^2 + 0.3575x + 2$$

parábola 5:

x_k	$f(x_k)$	dd1	dd2
2	2.7		
3	-0.57	-3.27	
4	-4.27	-3.7	-0.215

A parábola 5 é $par_5(x) = 2.7 - 3.27 * (x - 2) - 0.215 * (x - 2)(x - 3) = 2.7 + 3.27 * 2 - 6 * 0.215 + (-3.27 + 0.215 * 5)x - 0.215x^2 = 7.95 - 2.195 * x - 0.215x^2$ Então

$$par_5(x) = -0.215x^2 - 2.195x + 7.95$$

parábola 6:

x_k	$f(x_k)$	dd1	dd2
4	-4.27		
5	-5.87	-1.6	
6	-4.84	1.03	1.315

A parábola 6 é $par_6(x) = -4.27 - 1.6 * (x - 4) + 1.315 * (x - 4)(x - 5) = -4.27 + 1.6 * 4 + 1.315 * 20 + (-1.6 - 1.315 * 9)x + 1.315x^2 = 28.43 - 13.435 * x + 1.315x^2$.
Então

$$par_6(x) = 1.315x^2 - 13.435x + 28.43$$

parábola 7:

x_k	$f(x_k)$	dd1	dd2
6	-4.84		
8	-3.0	0.92	
9	-5.76	-2.76	-1.2267

A parábola 7 é $par_7(x) = -4.84 + 0.92 * (x-6) - 1.2267 * (x-6) * (x-8) = -4.84 - 0.92*6 - 1.2267*48 + (0.92 + 1.2267*14)x - 1.2267x^2 = -69.24 + 18.0938x - 1.2267x^2$. Então

$$par_7(x) = -1.2267x^2 + 18.0938x - 69.24$$

reta 1:

x_k	$f(x_k)$	dd1
9	-5.76	
10	-9.63	-3.87

A reta 1 é $r_1(x) = -5.76 + -3.87(x-9) = -5.76 + 34.83 - 3.87x = 29.07 - 3.87x$
Então

$$r_1(x) = -3.87x + 29.07$$

(b) A forma de Lagrange do polinômio interpolador 1 da função f nos pontos $(x_0, f(x_0)) = (-10, 13.6)$, $(x_1, f(x_1)) = (-9, 9.76)$, $(x_2, f(x_2)) = (-8, 7.03)$ é

$$par_1(x) = \sum_{i=0}^{2} f(x_i)L_i(x) = f(x_0)\prod_{k=1}^{2}\frac{x-x_k}{x_0-x_k} + f(x_1)\prod_{k=0,k\neq 1}^{2}\frac{x-x_k}{x_1-x_k} + f(x_2)\prod_{k=0}^{1}\frac{x-x_k}{x_2-x_k}$$

$$= 13.6\frac{x+9}{-1}\frac{x+8}{-2} + 9.76\frac{x+10}{1}\frac{x+8}{-1} + 7.03\frac{x+10}{2}\frac{x+9}{1}$$

$$= \frac{13.6}{2}(x^2+17x+72) - 9.76(x^2+18x+80) + \frac{7.03}{2}(x^2+19x+90)$$

$$= (6.8 - 9.76 + 3.515)x^2 + (6.8*17 - 9.76*18 + 3.515*19)x + (6.8*72 - 9.76*80 + 3.515*90)$$

$$= 0.555x^2 + 6.705x + 25.15$$

(c) Esboço das parábolas $1, \ldots, 7$ e da reta 1 é presente na Figura 1

Resolução (2):

(a) Usando a estrategia de interpolação em $(1.a)$ podemos estimar o erro de interpolação em cada um dos subintervalos usados na interpolação. Sabemos que usando uma parábola interpoladora em três pontos em $[a, b]$ com $x_0 = a < x_1 < x_2 = b$ temos que para cada $x \in [a, b]$ vale a seguinte expressão do erro de interpolação

$$|f(x) - p_2(x)| = |f[x_0, x_1, x_2, x]||(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)|$$

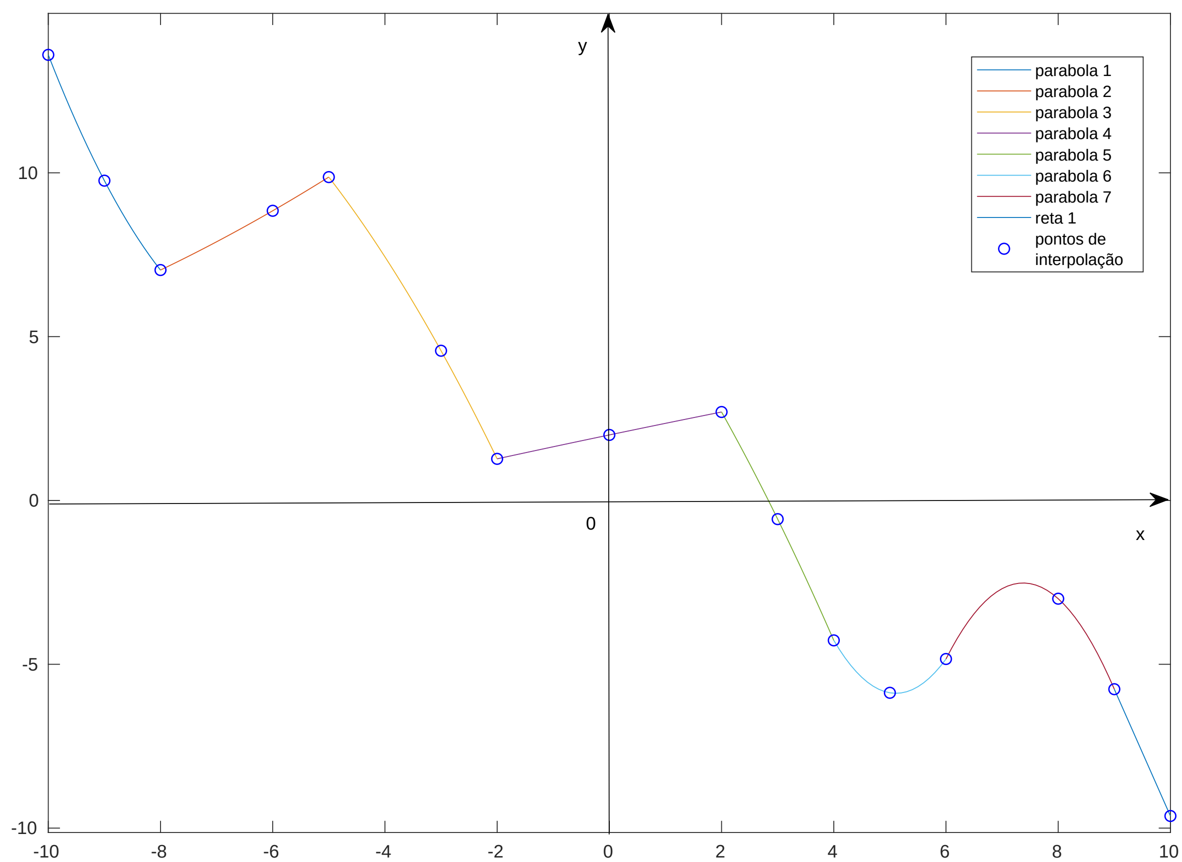

Figura 1: Resolução item 1.c

. Este erro de interpolação em x não se pode avaliar diretamente porque se desconhece $f(x)$ (que é preciso para computar $f[x_0,x_1,x_2,x]$) para cada x em $[a,b]$ então temos de estimar ele. Usamos a seguinte estimativa

$$|f[x_0,x_1,x_2,x]| \leq \max_{y\neq x_0,x_1,x_2,y\in[a,b]} |f[x_0,x_1,x_2,y]|.$$

Agora sendo que conhecemos a f somente nos nós x_k dados na tabela, então a estimativa utilizável é

$$|f[x_0,x_1,x_2,x]| \leq \max_{x_k\neq x_0,x_1,x_2} |f[x_0,x_1,x_2,x_k]|. \quad (estrategia\ 1)$$

Observamos que podemos estimar com um baixo custo computacional, que evite de construir muitas tabelas de diff. divididas, usando somente os x_k mais próximos de $[a,b]$ ($estrategia$ 2).

$$|f[x_0,x_1,x_2,x]| \leq \max_{x_k\neq x_0,x_1,x_2;x_k \text{ mais perto de } [x_0,x_2]} |f[x_0,x_1,x_2,x_k]| =: dd3estr2. \quad (estrategia\,2)$$

Esta estrategia evita de construir muitas tabelas de diff. divididas. A estrategia 2 é aquela que usaremos a seguir, mas também se podem construir todas as diferenças divididas de ordem 3 com os x_k dados $(estrategia 3)$.

$$|f[x_0,x_1,x_2,x]| \leq \max_{x_i,x_j,x_k,x_\ell} |f[x_i,x_j,x_k,x_\ell]| \quad (estrategia 3)$$

Para achar a estimativa em todo o intervalo $[x_0,x_2]$ de $|f(x)-p_2(x)|$ avaliamos a sua média usando o integral

$$M := \frac{1}{x_2-x_0}\int_{x_0}^{x_2} |f(x)-p_2(x)|dx = \frac{1}{x_2-x_0}|f[x_0,x_1,x_2,x]||(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)|$$

Usando a estrategia 2:

$$M \leq dd3estr2 \cdot \frac{1}{x_2-x_0}\int_{x_0}^{x_2} |(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)|dx$$

que será utilizada para obter a estimativa do erro de interpolação que usaremos em cada um dos 7 subintervalos $[x_0,x_2]$. No ultimo subintervalo $[9,10]$ usaremos a media e a estimativa usando a estrategia 2, ou seja

$$M := \frac{1}{10-9}\int_9^{10} |f(x)-p_1(x)|dx = \int_9^{10} f[9,10,x](x-9)(x-10)dx$$

$$\leq \max_{x_k\neq x_9,x_10,x_k \text{ mais perto de } [9,10]} |f[9,10,x_k]| \int_9^{10} |(x-9)(x-10)|dx =$$

$$= f[9,10,8]\int_9^{10} |(x-9)(x-10)|dx$$

ESTRATÉGIA 2

erro no subintervalo 1

x_k	$f(x_k)$	dd1	dd2	dd3
x_0=-10	13.6			
x_1=-9	9.76	-3.84		
x_2=-8	7.03	-2.73	0.555	
x_3=-6	8.84	0.905	1.2117	0.1642

A nossa estimativa da diferença dividida é $f[x_0, x_1, x_2, x] \approx 0.1642$.
Falta avaliar uma estimativa no intervalo $[x_0, x_2] = [-10, -9]$ de

$$Prod_1(x) := |(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)| \quad \text{com } x \in [x_0, x_2]$$

Computamos a media de $Prod_1(x)$ em $[x_0, x_2]$ usando o seu integral sobre o cumprimento do intervalo $[x_0, x_2]$. Portanto computamos

$$\frac{1}{x_2 - x_0} \int_{x_0}^{x_2} Prod_1(x)dx \approx Prod_1(x) \text{ em } [x_0, x_2]$$

$$\frac{1}{2} \int_{-10}^{-8} Prod_1(x)dx = \frac{1}{4} = 0.25$$

$$M_1 = \frac{1}{2} \int_{-10}^{-8} |f(x) - p_2(x)|dx \leq 0.1642 \cdot 0.25 \approx 0.0410$$

erro no subintervalo 2 $x_0 = -8, x_1 = -6 x_2 = -5$.
Consideramos os x_k mais próximos ao intervalo $[-8, -5]$ que são $x_{-1} = -9$ e $x_3 = -3$

x_k	$f(x_k)$	dd1	dd2	dd3
-9	9.76			
-8	7.03	-2.73		
-6	8.84	0.905	1.2117	
-5	9.87	1.03	0.0417	$f[-9, -8, -6, -5]$= -0.2925
-3	4.57	-2.65	-1.2267	$f[-8, -6, -5, -3]$= -0.2537

Então usaremos a estimativa da estrategia 2 para $f[x_0, x_1, x_2, y]$:

$$\max_{y \in [x_0, x_2]} |f[x_0, x_1, x_2, y]| \approx 0.2925$$

$$M_2 = \frac{1}{3} \int_{-8}^{-5} |f(x) - p_2(x)|dx \leq 0.2925 \frac{1}{3} \int_{-8}^{-5} |(x+8)(x+6)(x+5)|dx = 0.2925 \cdot 1.0278 \approx 0.3006$$

erro no subintervalo 3 $x_0 = -5, x_1 = -3 x_2 = -2$.
Consideramos os x_k mais próximos ao intervalo $[-5, -2]$ que são $x_{-1} = -6$ e $x_3 = 0$

x_k	$f(x_k)$	dd1	dd2	dd3
-6	8.84			
-5	9.87	1.03		
-3	4.57	-2.65	-1.2267	
-2	1.27	-3.30	-0.2167	0.2525
0	2	0.365	1.2217	0.2877

A estimativa da estrategia 2 para $f[x_0, x_1, x_2, y]$ é :

$$\max_{y\in[x_0,x_2]} |f[x_0, x_1, x_2, y]| \approx 0.2877$$

$$M_3 = \frac{1}{3}\int_{-5}^{-2} |f(x)-p_2(x)|dx \leq 0.2877\frac{1}{3}\int_{-5}^{-2} |(x+5)(x+3)(x+2)|dx = 0.2877\cdot 1.0278 \approx 0.2957$$

erro no subintervalo 4 $x_0 = -2, x_1 = 0, x_2 = 2.$

Consideramos os x_k mais próximos ao intervalo $[-2, 2]$ que são $x_{-1} = -3$ e $x_3 = 3$

x_k	$f(x_k)$	dd1	dd2	dd3
-3	4.57			
-2	1.27	-3.30		
0	2	0.365	1.2217	
2	2.7	0.35	-0.0037	-0.2451
3	-0.57	-3.27	-1.2067	-0.2406

Estimativa da estrategia 2 para $f[x_0, x_1, x_2, y]$:

$$\max_{y\in[x_0,x_2]} |f[x_0, x_1, x_2, y]| \approx 0.2451$$

$$M_4 = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} |f(x) - p_2(x)|dx \leq 0.2451\frac{1}{4}\int_{-2}^{2} |(x + 2)(x)(x - 2)|dx = 0.2451 \cdot 2 = 0.4902$$

erro no subintervalo 5 $x_0 = 2, x_1 = 3, x_2 = 4.$

Consideramos os x_k mais próximos ao intervalo $[2, 4]$ que são $x_{-1} = 0$ e $x_3 = 5$

x_k	$f(x_k)$	dd1	dd2	dd3
0	2			
2	2.7	0.35		
3	-0.57	-3.27	-1.2067	
4	-4.27	-3.7	-0.215	0.2479
5	-5.87	-1.6	1.05	0.4217

$$\max_{y\in[x_0,x_2]} |f[x_0, x_1, x_2, y]| \approx 0.4217$$

$$M_5 = \frac{1}{2}\int_{2}^{4} |f(x)-p_2(x)|dx \leq 0.4217\frac{1}{2}\int_{2}^{4} |(x-2)(x-3)(x-4)|dx = 0.4217\cdot 0.25 \approx 0.1054$$

erro no subintervalo 6 $x_0 = 4, x_1 = 5, x_2 = 6.$

Consideramos os x_k mais próximos ao intervalo $[4, 6]$ que são $x_{-1} = 3$ e $x_3 = 8$

x_k	$f(x_k)$	dd1	dd2	dd3
3	-0.57			
4	-4.27	-3.7		
5	-5.87	-1.6	1.05	
6	-4.84	1.03	1.315	0.0883
8	-3	0.92	-0.0367	-0.3379

$$\max_{y\in[x_0,x_2]}|f[x_0,x_1,x_2,y]|\approx 0.3379$$

$$M_6=\frac{1}{2}\int_4^6|f(x)-p_2(x)|dx\le 0.3379\frac{1}{2}\int_4^6|(x-4)(x-5)(x-6)|dx=0.3379\cdot 0.25=0.0845$$

erro no subintervalo 7 $x_0=6, x_1=8, x_2=9$.

Consideramos os x_k mais próximos ao intervalo $[4,6]$ que são $x_{-1}=5$ e $x_3=10$

x_k	$f(x_k)$	dd1	dd2	dd3
5	-5.87			
6	-4.84	1.03		
8	-3	0.92	-0.0367	
9	-5.76	-2.76	-1.2267	-0.2975
10	-9.63	-3.87	-0.555	0.1679

$$\max_{y\in[x_0,x_2]}|f[x_0,x_1,x_2,y]|\approx 0.2975$$

$$M_7=\frac{1}{3}\int_6^9|f(x)-p_2(x)|dx\le 0.2975\frac{1}{3}\int_6^9|(x-6)(x-8)(x-9)|dx=0.2975\cdot 1.0278\approx 0.3058$$

erro no subint. [9,10] $x_0=9, x_1=10$.

Consideramos o x_k mais próximos ao intervalo $[9,10]$ que são $x_{-1}=8$

$$\max_{x\in[x_0,x_1]}|f(x)-p_1(x)|\le\max_{x\in[x_0,x_1]}|f[x_0,x_1,x]|int_9^{10}|(x-9)(x-10)|dx$$

x_k	$f(x_k)$	dd1	dd2
8	-3		
9	-5.76	-2.76	
10	-9.63	-3.87	-0.555

$$\max_{x\in[x_0,x_1]}|f[x_0,x_1,x]|\approx 0.555$$

$$M_{r1}=\frac{1}{1}\int_9^{10}|f(x)-p_1(x)|dx\le 0.555\int_9^{10}|(x-9)(x-10)|dx=0.555\cdot 0.1667\approx 0.0925$$

Para medir o erro médio em todo o intervalo $[a,b]=[-10,10]$ usamos a media pesada das medias em cada subintervalo, onde os pesos são os cumprimentos de cada subintervalo.

$$\begin{aligned}E_{medio}&=\frac{p_1M_1+p_2M_2+\ldots p_7M_7+p_{r1}M_{r1}}{b-a}\\&=\frac{2\cdot M_1+3\cdot M_2+3\cdot M_3+4\cdot M_4+2\cdot M_5+2\cdot M_6+3\cdot M_7+1\cdot M_{r_1}}{20}\\&=\frac{0.0821+0.9019+0.8870+1.9607+0.2108+0.1690+0.9173+0.0925}{20}=0.2611\end{aligned}$$

(b) Para estimar o valor de f em $x=1$ usamos a parábola $par_4(x)==-0.0037x^2+0.3575x+2$ que interpola a f em $x_0=-2$, $x_1=0$, $x_2=2$. Por isso podemos dizer que

$$par_4(1)=-0.0037+0.3575+2=2.3538\approx f(1)$$

Podemos melhorar esta estimativa sendo que estimamos o erro $|f(x) - par_4(x)|$ no como

$$|f(x)-par_4(x)| = |f[x_0, x_1, x_2, x](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)| \leq \max_{y\in[x_0,x_2]} |f[x_0, x_1, x_2, y]||(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)|$$

Usando a Estrategia 2 do item anterior no subintervalo 4 $[-2, 2]$ obtemos $\max_{y\in[x_0,x_2]} |f[x_0, x_1, x_2, y]| \approx$ 0.2451 e portanto

$$|f(1)-par_4(1)| =\leq \max_{y\in[x_0,x_2]} |f[x_0, x_1, x_2, y]||(1-x_0)(1-x_1)(1-x_2)| \approx 0.2451|(1+2)(1-0)(1-2)| = 0.7353$$

Então

$$|f(1) - 2.3538| \leq 0.7353 \iff f(1) \approx 2.3538 \pm 0.7353,\ f(1) \in [1.6185, 3.0891]$$

(c) Se conhecemos mais pontos em cada subintervalos podemos considerar a cubica que interpola a f nos quatro pontos de cada um dos primeiros 7 subintervalos, e a parábola que interseca a curva f em três pontos no subintervalo $[9, 10]$. Na maioria dos casos estes informações a mais permite de aproximar melhor a função f se as derivadas não mudam ao aumentar da ordem. Isso porque vale

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}h^{n+1}}{4(n+1)}$$

com $M_{n+1} = \max_{y\in I(x_0,x_1,\ldots,x_n)} |f^{(n+1)}(y)|$ e $h = \max |x_{i+1} - x_i|$ Assim se o numero $m = n+1$ dos nós de interpolação aumentam num dado intervalo (ou subintervalo como no nosso caso) temos que h diminui, n aumenta e então $\frac{h^{n+1}}{(n+1)}$ diminui rapidamente, se as derivadas f são limitadas e não crescem bruscamente para n que aumenta então o erro irá diminuir. Mas existem casos onde as derivadas de f aumentam bruscamente não levando a uma diminuição do erro como por exemplo no caso da função de Runge vista na aula 26. Portanto não existe uma resposta única a questão deste item, sendo que depende da f considerada.

(d) Um processo de interpolação que converge a função dada f existe e é baseado na interpolação mediante o uso de Splines polinomiais Consideramos o caso das Splines lineares S_1: em cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ são definidos como segue

$$S_{1|[x_{i-1},x_i]}(x) := f(x_{i-1})\frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}} + f(x_i)\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$$

Assim S_1 é um polinômio de grau até 1 em cada subintervalo é continuo nos extremos de cada subintervalo e verifica

$$S_1(x_i) = f(x_i),\ \text{para cada}\ i = 0, \ldots, n.$$

O erro de interpolação para cada $x \in [x_{i-1}, x_i]$ é
$E_n(x) = |f(x) - S_1(x)| = |f(x) - S_{1_{|[x_{i-1},x_i]}}(x)| = |f(x) - p_1(x)|$
$= |\frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_{i-1})(x - x_i)| \leq \frac{\max_{y\in[x_{i-1},x_i]} |f''(y)|}{4\cdot 2}h^2$ onde $h = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i - x_{i-1}|$.

Note que no intervalo fixo $[a, b]$ se n aumenta então aumentam os subintervalos de $[a, b]$ e os pontos x_i, e teremos que então h vai diminuir e portanto o erro de interpolação também.

Ao limite

$$\lim_{n\to\infty} E_n(x) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\max_{y\in[x_{i-1},x_i]} |f''(y)|}{8} h^2 \leq \frac{\max_{y\in[a,b]} |f''(y)|}{8} \lim_{n\to\infty} h^2 = 0$$

O erro converge com ordem 2 respeito $h = \max\limits_{i=1,\ldots,n} |x_i - x_{i-1}|$.