MS211, Cálculo Numérico, Turmas L, M
Segundo Semestre de 2020, UNICAMP

# Resolução Atividade 05

**Entrega dos exercícios SOMENTE por Google Classroom até terça 24/11/2020.**

**Os exercícios podem ser desenvolvidos em grupos de até três membros.**
**Escreva o nome e o RA dos membros do grupo em todas as folhas, com destaque na primeira página. É aconselhável que somente um membro, por grupo, faça a entrega da atividade completa do grupo no Google Classroom.**

(1) Seja dado o Problema de Valor Inicial (PVI) de primeira ordem, $y = y(x)$,

$$(\star)\begin{cases} y' = y^2, \quad x > 0, \\ y(0) = 3. \end{cases}$$

Pede-se:

(a) A condição Lipschitz é satisfeita para todo $y \in [0, \infty)$? Motive a sua resposta.

(b) Provar que o método de **Euler explícito** não é estável.
**Dica:** Para estudar a instabilidade do método de **Euler explícito** aplicado ao PVI $(\star)$, note que a solução $y(x)$ de $y' = y^2$ é crescente no intervalo $[0, \infty)$.

(c) Independentemente dos itens (a)-(b), implemente (*em uma linguagem de programação de sua escolha*), um código computacional para o **Método de Euler explícito** e calcule uma solução aproximada do PVI $(\star)$ em $\bar{x} = 2$, ou seja, calcule $y(2)$.
Neste item (c), varie o tamanho do passo $h = x_{i+1} - x_i$ para aproximar a solução do PVI $(\star)$ no intervalo $x \in [0, 2]$, por exemplo, $h = 2^{-n}$, $n$ inteiro, $n = 0, 1, 2, 3, 4, \cdots$ e verifique se o **Método de Euler explícito** está convergindo (ou não) na medida em que $h \longrightarrow 0^+$. Para fundamentar sua resposta, pode utilizar gráficos, tabelas, e demais argumentos pertinentes ao exercício proposto.

(d) Considere agora o PVI de segunda ordem, $y = y(x)$,

$$(\diamond)\begin{cases} y'' = y^2, \quad x > 0, \\ y(0) = 3, \\ y'(0) = -1. \end{cases}$$

Descreva um método numérico para calcular aproximações das quantidades $y(\bar{x})$ e $y'(\bar{x})$ associadas ao PVI $(\diamond)$, sendo $\bar{x} = 3$.
**Importante:** Não é necessário implementar o método descrito.

(2) Considere o seguinte PVI de primeira ordem, $y = y(x)$,

$$(\triangle) \begin{cases} y' = y + cos(y) - x, & x > 1, \\ y(1) = 2. \end{cases}$$

(a) Verifique se o PVI ($\triangle$) admite uma única solução.

**Dica:** Estude o teorema de existência e unicidade de solução para PVIs de primeira ordem, fazendo uma leitura minunciosa das hipóteses lá indicadas.

(b) Escreva (*em uma linguagem de programação de sua escolha*), códigos computacionais para os três **Métodos:**
1) **Euler Explícito**,
2) **Euler Implícito**,
3) **Euler Aperfeiçoado**.
que tem como input um ponto $\bar{x}$, e como output o valor aproximado de $y(\bar{x})$ obtido do método, onde $y = y(x)$ é a função solução do PVI ($\triangle$).

(c) Implemente os códigos do item (b) usando agora $\bar{x} = 5$. Mostre que ao diminuir o tamanho do passo $h$ os três métodos convergem ao valor $y(5) \approx -11.79512$. Ou seja, para os três métodos indicados, resolva numericamente o PVI ($\triangle$) no intervalo $[1, \bar{x}]$. Neste item varie o tamanho do passo $h = x_{i+1} - x_i$, por exemplo, $h = 2^{-n}$, $n$ inteiro, $n = 0, 1, 2, 3, 4, \cdots$, e descreva o comportamento dos métodos neste estudo. Para fundamentar sua resposta, pode utilizar gráficos, tabelas, e demais argumentos pertinentes ao exercício proposto.

(d) Utilizando os resultados dos itens (b) e (c), verifique que o método de **Euler Aperfeiçoado** fornece uma melhor aproximação da solução $y(\bar{x})$ em relação aos **métodos de Euler (implícito e explícito)**, considerando um mesmo número de passos. Em particular, mostre que a condição sobre o erro global $|y(\bar{x}) - y_n| < 10^{-1}$ é satisfeita usando o **método de Euler Aperfeiçoado** é obtida num número $n$ menor de passos do que nos **métodos de Euler (implícito e explícito)**.

(e) Verifique, usando todos os resultados numéricos obtidos nos itens (b), (c) e (d) que o **Método de Euler Aperfeiçoado** é um método de segunda ordem, enquanto que os **Métodos de Euler (implícito e explícito)** são ambos de primeira ordem.

# Resolução (1):

(1.a) O problema usa $f(x, y) = y^2$. Notamos que $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$ que não se pode limitar em todo $[0, \infty[$ porque $\sup \frac{\partial f}{\partial y} = \sup_{y \in [0,\infty[} 2y = +\infty$ Então a $f$ não é Lipchitziana: não existe $L > 0$ limitada tal que $\forall x \forall y_1, y_2$:
$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| < L|y_2 - y_1|$. Isso porque se existesse a constante de Lipschitz $L$, ela satisfaz $L = \sup \frac{\partial f}{\partial y}$

Outra maneira de provar que não existe a que $|f(x, y_2) - f(x, y_1)| = |y_2^2 - y_1^2| = |y_2 + y_1||y_2 - y_1|$ e assim notamos que não existe alguma $L > 0$ limitada tal que $\forall y_1, y_2$ $|y_2 + y_1| < L$.

(1.b) Observamos também que sendo $y' = y^2 > 0$ então a solução do problema diferencial cresce rapidamente chegando ao infinito rapidamente.

O método de Euler explicito é estável (os erros de arredondamento não levam a um grande erro na solução do PVI usando o método numérico) se usamos o passo $h > 0$ tal que $|1 + h\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)| < 1$

Aqui tem de ser considerada $y = y(x)$ ouseja $y$ como solução do PVI ($\star$). Notamos que sendo $y = y(x)$ crescente e temos $y(0) = 3 > 0$ então necessariamente $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y > 0$ e portanto não podemos determinar um passo $h$ tal que $|1 + h\frac{\partial f}{\partial y}| = |1 + 2hy| < 1$ Portanto o método explicito aplicado a ($\star$) é sempre instavel para cada $h$. Isso significa que indeoendemente do tamanho de $h$ os erros de arredondamento durante as iterações do método acumulam-se impedindo de observar a convergência teorica de ordem 1 do método

$$\lim_{h\to 0} e_h = \lim_{h\to 0} |y(\bar{x}) - y_n| = 0$$

onde $n = \frac{\bar{x}-x_0}{h}$.

(1.c) Aplicamos o método de Euler explícito associado ao Problema de Valor Inicial (PVI) de passo $h$ :

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) = y_i + hy_i^2 = y_i(1 + hy_i)$$

com $i = 0, \dots, \bar{n} - 1$ onde $\bar{n} = \frac{\bar{x}-x_0}{h}$.

Seguindo o que foi sugerido escolhemos $h = 2^{-n} = 1, 0.5, 0.25, 0.125, \dots$

| $h$ | $\bar{n}$ | $y_{\bar{n}}$ |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 156 |
| 0.5 | 4 | $2.2525 \cdot 10^5$ |
| 0.25 | 8 | $9.6870 \cdot 10^{35}$ |
| 0.125 | 16 | Inf (overflow) |
| 0.0626 | 32 | Inf (overflow) |

Temos uma situação esperada, sendo que o método de Euler explicito para resolver esta PVI não é estavel, o erro não converge a zero, ele até tende ao infinito para $h$ que tende a zero.

(1.d) O sistema ($\diamond$) $\begin{cases} y'' = y^2, & x > 0, \\ y(0) = 3, & \\ y'(0) = -1. & \end{cases}$ é um PVI de segunda ordem que pode reduzir-se, introduzindo variaveis/funções auxiliares num sistema de duas equações diferenciais de primeira ordem com duas condições iniciais.

Introduzimos a função auxiliar $z := y'$ assim obtemos as seguintes equivalências

$$\begin{cases} y''(x) = y(x)^2, \\ y(0) = 3, \\ y'(0) = -1. \end{cases} \iff \begin{cases} y'(x) = z(x), \\ z'(x) = y^2(x), \\ y(0) = 3, \\ z(0) = -1 \end{cases}$$

Agora seja $Y = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$ e $F(x, Y) = \begin{pmatrix} z \\ y^2 \end{pmatrix}$ obtemos a PVI vetorial $\begin{cases} Y' = F(x, Y) \\ Y(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \end{cases}$

Podemos agora implementar o método de Euler implicito:

$$Y_{i+1} = Y_i + hF(x_{i+1}, Y_{i+1}) \iff \begin{cases} y_{i+1} = y_i + hz_{i+1} \\ z_{i+1} = z_i + hy_{i+1}^2 \end{cases}$$

Para poder aproximar o valor $y(\bar{x})$ com $\bar{x} = 3$ por um dado $h$ (divisor de 3) precisamos $n = \frac{\bar{x}-0}{h} = \frac{3}{h}$ passos para obter $Y_n = \begin{pmatrix} y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ com $y_n \approx y(3)$. Em cada um dos $n$ passos com $i = 0, \ldots, n-1$ temos de resolver o sistema não linear

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + hz_{i+1} \\ z_{i+1} = z_i + hy_{i+1}^2 \end{cases}$$

onde $y_0 = 3, z_0 = -1$. Podemos usar o método de Newton aplicado a este sistema em cada passo, assim teremos uma aproximação das soluções $y_{i+1}, z_{i+1}$ depois os $n = \frac{3}{h}$ passos obteremos uma $y_n$ que será o valor achado de $y(3)$.

# Resolução (2):

(2.a) O teorema de existência e unicidade tem como hipóteses:

- $f = f(x, y) : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é continua respeito a variavel $x$ em $\Omega$
- $f$ é Lipschitziana respeito $y$, ou seja existe $L > 0$ tal que para cada $x \in \Omega$ e $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq L|y_2 - y_1|$$

Sendo que $f(x, y) = y + \cos(y) - x$ temos que $f$ é continua respeito $x$ em $\Omega = \{x | x > 1\} = ]1, \infty[$. Verificamos se $f(x, y)$ satisfaz a condição de Lipschitz. Usando a expanção em Serie de Taylor tmos

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| = |\frac{\partial f}{\partial y}(\xi)||y_2 - y_1| \tag{1}$$

com $\xi \in I(y_1, y_2)$. Observamos que $|\frac{\partial f}{\partial y}| = |1 - \sin(y)| \leq 2$ portanto de (1) usando $L = 2$ temos

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| = |\frac{\partial f}{\partial y}(\xi)||y_2 - y_1| \leq 2|y_2 - y_1|.$$

E então a condição de Lipschitz é satisfeita, e então o PVI ($\triangle$) admite única solução.

Outras condições que garantem a existência e unicidade são que:

Se $f(x, y)$ e sua derivada $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas em um retângulo

$$R = (\alpha, \beta) \times (\gamma, \delta) = \{(x, y) : \alpha < x < \beta, \gamma < y < \delta\}$$

que contém o ponto $(x_0, y_0)$, então o problema de valor inicial

$$y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$$

admite uma única solução $y \equiv y(x)$ para todo $x$ num intervalo $I \subseteq (\alpha, \beta)$ que contém $x_0$.

A condição de continuidade da derivada pode ser trocada pela necessidade de $f$ ser Lipschitz.

Verificamos se $f$ satisfaz a condição de Lipschitz.

(2.b) – O método de Euler Explícito pode ser implementado usando

$$y_k = y_{k-1} + hf(x_{k-1}, y_{k-1})$$

– O método de Euler Implícito pode ser implementado usando

$$y_k = y_{k-1} + hf(x_k, y_k).$$

Isso implica

$$y_k = y_{k-1} + h(y_k + cos(y_k) - x_k).$$

Como $x_k$ e $y_{k-1}$ são conhecidos, podemos aplicar o método de newton (para encontrar zeros de funções) para aproximar $y_k$. Podemos também representar esse problema implícito como um sistema linear tal que $Ay^H = b$, onde $y^H$ é uma aproximação para a solução.

– O método de Euler Aperfeiçoado pode ser implementado usando

$$y_k = y_{k-1} + \frac{h}{2}(k_1 + k_2)$$

onde

$$k_1 = f(x_{k-1}, y_{k-1}), k_2 = f(x_k, y_{k-1} + hk_1),$$

```
%Euler explícito
%Input: xbar,
% h  tamanho do passo do metodo
function out=Eexplicito(xbar,h)
x0=1;
y0=2;
while x0<xbar
y = y0+h*(y0+cos(y0)-x0);
y0=y;
x0=x0+h;
end
out=y
end


%Euler aperfeiçoado
function out=Eaperfeicoado(xbar,h)
x0=1;
y0=2;
while x0 < xbar
k1 = (y0+cos(y0)-x0);
k2 = ((y0+h*k1)+cos(y0+h*k1)-(x0+h));
y = y0+h*(k1+k2)/2;
y0=y;
x0=x0+h;
```

```
end
out=y

%Euler implícito
function out=Eimplicito(xbar,h)
x0=1;
y0=2;
%h=2^(-n);
y1=0;
yc=y0;
error = 1000;
tolerance=0.000001;
while x0 < xbar


yold = y0;
while error >= tolerance
ynew = yold-(y0-yold+h*(yold+cos(yold)-(x0+h)))/((-1+h*(1-sin(yold))));
error = abs(ynew-yold);
yold=ynew;
end
error = 1000;
y = ynew;
y0=y;
x0=x0+h;
end
out=y
```

(2.c) Temos então

| $n$ | Euler Explícito | Euler Implícito | Euler Aperfeiçoado |
|---|---|---|---|
| 1 | -4.332859128068677 | -55.158521514290690 | -11.008268325587911 |
| 2 | -7.182138525331082 | -22.284652828287168 | -11.410123457189918 |
| 5 | -11.057687869890316 | -12.560312433699563 | -11.787884018994866 |
| 10 | -11.771952535173195 | -11.818469390847849 | -11.795191908710466 |
| 20 | -11.795176595033650 | -11.795222021229216 | -11.795199308114297 |

(2.d) Observe que para n=4 obtemos os erros

| $n$ | Euler Explícito | Euler Implícito | Euler Aperfeiçoado |
|---|---|---|---|
| 4 | −10.329323846655287 | -13.416234918935752 | -11.767080969123182 |

onde o euler aperfeiçoado foi o único que satisfez a condição de tolerância.

(2.e) Temos os seguintes erros tomando $y(5) = -11.79512$.

| $n$ | Euler Explícito | Euler Implícito | Euler Aperfeiçoado |
|---|---|---|---|
| 1 | 7.462260871931323 | 43.363401514290686 | 0.786851674412089 |
| 2 | 4.612981474668919 | 10.489532828287167 | 0.384996542810082 |
| 3 | 2.785774715197638 | 3.834698717024962 | 0.103896299820997 |
| 4 | 1.465796153344714 | 1.621114918935751 | 0.028039030876819 |
| 5 | 0.737432130109685 | 0.765192433699562 | 0.007235981005135 |
| 6 | 0.369840195591642 | 0.376197510192002 | 0.001784024809472 |
| 7 | 0.185344469769765 | 0.187009180749364 | 0.000390698293161 |
| 8 | 0.092780530671826 | 0.093312952386999 | 0.000038704388903 |

Destes dados observamos que o método de Euler explicito tem um erro que converge a zero com ordem 1. Isso porque em cada linha o erro é quase a metade do erro da linha anterior que é obtido com $h$ duplo. O mesmo vale para Euler implicito. O método de Euler aperfeiçoado é em vez de segunda ordem porque diminuindo de metade o passo $h$ o erro é um quarto daquele anterior.