MS211 - Atividade 04 - Turmas L e M - Gabarito

Questão 1: Considere a seguir três sistemas lineares de dimensão 6 do tipo $Ax = b$, sendo o vetor $b = (1, 1, 1, 1, 1, 1)^t$, com matriz $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,6}$ dada como segue em cada caso:

$$(1.1) \quad a_{ij} = \begin{cases} 2, & \text{se } i = j \\ -1, & \text{se } |i-j| = 1 \\ 0, & \text{nos outros casos} \end{cases}$$

$$(1.2) \quad a_{ij} = \begin{cases} -2, & \text{se } i = j \\ 0.5, & \text{se } |i-j| = 1 \\ 0, & \text{nos outros casos} \end{cases}$$

$$(1.3) \quad a_{ij} = \begin{cases} 2, & \text{se } i = j \\ 2, & \text{se } |i-j| = 1 \\ 0, & \text{nos outros casos} \end{cases}$$

Para cada sistema linear $Ax = b$ associado às matrizes acima, pede-se:

a) Verifique sobre a convergência, ou não, dos dois métodos: Jacobi e Gauss-Seidel. Em qualquer caso, motive e justifique sua resposta.

b) No caso positivo de convergência aplique o método iterativo correspondente, calculando uma aproximação $x^{(k)}$ da solução em cada caso, tal que o resíduo $||r^{(k)}|| = ||b - Ax^{(k)}||$ seja menor do que a tolerância $\epsilon_1 = 10^{-2}$ na norma do máximo, e ao mesmo tempo também seja satisfeito o critério das distâncias relativas como segue,

$$d_r = \frac{||x^{(k)} - x^{(k-1)}||_\infty}{||x^{(k)}||_\infty} < \epsilon_2, \qquad \text{tal que} \quad \epsilon_2 = 10^{-1}.$$

c) Em relação ao item (b), faça, para alguma iteração k incluindo a primeira iteração, a impressão das soluções, distâncias relativas e resíduos achados, imprimindo ao final o número total de iterações para o qual o critério de parada foi satisfeito, e a solução final achada.

Solução:

(1.1) Utilizando a definição dos elementos da matriz A, o sistema linear $Ax = b$ pode ser escrito como

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Vamos verificar se a matriz A é convergente quando utilizamos o método de Jacobi, ou seja, se satisfaz o critério das linhas, e quando utilizamos o método de Gauss-Seidel, ou seja, se satisfaz o critério de Sassenfeld.

Para o critério das linhas, seja $\alpha_k = \frac{1}{|a_{kk}|}\sum_{j=1,n\neq k}|a_{kj}|$. Se $\alpha = \max\, \alpha_k < 1$, $\forall 1 \leq k \leq n$, então o método de Jacobi gera uma sequência $\{x^{(k)}\}$ convergente para a solução do sistema dado, independentemente da escolha sa aproximação inicial, $x^{(0)}$. Então, para a nossa matriz A, temos:

$$\begin{array}{lll} \alpha_1 = \frac{|-1|}{2} = 0.5, & \alpha_2 = \frac{|-1|+|-1|}{2} = 1, & \alpha_3 = \frac{|-1|+|-1|}{2} = 1, \\ \alpha_4 = \frac{|-1|+|-1|}{2} = 1 & \alpha_5 = \frac{|-1|+|-1|}{2} = 1 & \alpha_6 = \frac{|-1|}{2} = 0.5. \end{array}$$

Então, para $1 \leq k \leq 6$, temos que $\alpha = \max\, \alpha_k = 1$, ou seja, o critério das linhas não é satisfeito. Logo, o método de Jacobi pode ou não convergir.

Vamos verificar se a matriz A satisfaz o critério de Sassenfeld: Sejam

$$\beta_1 = \frac{|a_{12}| + |a_{13}| + \cdots + |a_{1n}|}{|a_{11}|} \quad \text{e} \quad \beta_j = \frac{|a_{j1}|\beta_1 + |a_{j2}|\beta_2 + \cdots + |a_{jj-1}|\beta_{j-1} + |a_{jj+1}| + \cdots + |a_{jn}|}{|a_{jj}|}.$$

Seja $\beta = \max\,\{\beta_j\}$, para $1 \leq j \leq n$. Se $\beta < 1$, então o método de Gauss-Seidel gera uma sequência convergente, qualquer que seja $x^{(0)}$. Para a nossa matriz A, temos

$$\begin{array}{lll} \beta_1 = \frac{|-1|}{2} = 0.5, & \beta_2 = \frac{|-1|\beta_1+|-1|}{2} = 0.75, & \beta_3 = \frac{|-1|\beta_2+|-1|}{2} = 0.875, \\ \beta_4 = \frac{|-1|\beta_3+|-1|}{2} = 0.9375 & \beta_5 = \frac{|-1|\beta_4+|-1|}{2} = 0.96875 & \beta_6 = \frac{|-1|\beta_5}{2} = 0.484375. \end{array}$$

Como $\beta = \max\,\{\beta_j\} = 0.96875 < 1$, concluímos que a sequência $\{x^{(k)}\}$ gerada é convergente quanto ao método de Gauss-Seidel.

b) e c) Como verificamos a convergência para o método de Gauss-Seidel, vamos aplicá-lo com os seguintes critérios de parada:

$$||r^{(k)}|| = ||b - Ax^{(k)}|| < \epsilon_1 = 10^{-2} \qquad \text{e} \qquad dr^{(k)} = \frac{||x^{(k)} - x^{(k-1)}||_\infty}{||x^{(k)}||_\infty} < \epsilon_2 = 10^{-1},$$

em que $||\bullet||$ é a norma do máximo, definida como

$$||r^{(k)}|| = \max|r_i^{(k)}|, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

na qual $r_i^{(k)}$ é a componente i do vetor $r^{(k)}$.

Utilizando a matriz A, podemos escrever o sistema linear $Ax = b$ como:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 & = 1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 & = 1 \\ 0x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 0x_5 + 0x_6 & = 1 \\ 0x_1 + 0x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 + 0x_6 & = 1 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 - x_4 + 2x_5 - x_6 & = 1 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 - x_5 + 2x_6 & = 1 \end{cases}.$$

Como utilizaremos o método de Gauss-Seidel, devemos resolver o seguinte sistema linear iterativo:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} & = 0.5(1 + x_2^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} & = 0.5(1 + x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} & = 0.5(1 + x_2^{(k+1)} + x_4^{(k)}) \\ x_4^{(k+1)} & = 0.5(1 + x_3^{(k+1)} + x_5^{(k)}) \\ x_5^{(k+1)} & = 0.5(1 + x_4^{(k+1)} + x_6^{(k)}) \\ x_6^{(k+1)} & = 0.5(1 + x_5^{(k+1)}) \end{cases}.$$

Utilizando, como vetor inicial, $x^{(0)} = (3, 3, 3, 3, 3, 3)^t$, temos a primeira iteração:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} & = 0.5(1 + x_2^{(0)}) = 0.5(1 + 3) = 2 \\ x_2^{(1)} & = 0.5(1 + x_1^{(1)} + x_3^{(0)}) = 0.5(1 + 2 + 3) = 3 \\ x_3^{(1)} & = 0.5(1 + x_2^{(1)} + x_4^{(0)}) = 0.5(1 + 3 + 3) = 3.5 \\ x_4^{(1)} & = 0.5(1 + x_3^{(1)} + x_5^{(0)}) = 0.5(1 + 3.5 + 3) = 3.75 \\ x_5^{(1)} & = 0.5(1 + x_4^{(1)} + x_6^{(0)}) = 0.5(1 + 3.75 + 3) = 3.875 \\ x_6^{(1)} & = 0.5(1 + x_5^{(1)}) = 0.5(1 + 3.875) = 2.4375 \end{cases}.$$

Então, $x^{(1)} = (2, 3, 3.5, 3, 75, 3.875, 2.4375)^t$. Verificando os testes de parada, temos $||r^{(1)}|| = 0.875 > 10^{-2} = \epsilon_1$ e $dr^{(1)} = 0.3333 > 10^{-1} = \epsilon_2$.

Como a tolerância não foi atingida, faremos outra iteração. Dessa forma, após 20 iterações, temos a solução aproximada dada por:

$$\tilde{x} = (2.9764, 4.9617, 5.9570, 5.9613, 4.9721, 2.9861)^t.$$

Vale observar que, na quarta iteração, o critério de parada das distâncias relativas $dr^{(4)} = 0.0695 < 10^{-1} = \epsilon_2$ foi satisfeito, mas continuamos as iterações, uma vez que o critério do resíduo não foi satisfeito, e no enunciado pedia que ambos fossem satisfeitos.

(1.2) Utilizando a definição dos elementos da matriz A, o sistema linear $Ax = b$ pode ser escrito como

$$\begin{pmatrix} -2 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & -2 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & -2 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & -2 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & -2 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Devemos verificar se a matriz A satisfaz o critério das linhas, ou seja, se $\alpha = \max \alpha_k < 1$, $\forall 1 \le k \le n$, em que $\alpha_k = \frac{1}{|a_{kk}|} \sum_{j=1, n \neq k} |a_{kj}|$. Então, para a matriz A dada, temos:

$$\begin{array}{lll} \alpha_1 = \frac{0.5}{|-2|} = 0.25, & \alpha_2 = \frac{0.5+0.5}{|-2|} = 0.5, & \alpha_3 = \frac{0.5+0.5}{|-2|} = 0.5 \\ \alpha_4 = \frac{0.5+0.5}{|-2|} = 0.5 & \alpha_5 = \frac{0.5+0.5}{|-2|} = 0.5 & \alpha_6 = \frac{0.5}{|-2|} = 0.25. \end{array}$$

Logo, para $1 \le k \le 6$, temos que $\alpha = \max \alpha_k = 0.5 < 1$ e podemos concluir que há convergência para os métodos de Jacobi e de Gauss-Seidel, uma vez que, se o critério das linhas é satisfeito, automaticamente o critério de Sassenfeld também é.

b) e c) Primeiramente, podemos escrever o sistema linear $Ax = b$ da seguinte maneira:

$$\begin{cases} -2x_1 + 0.5x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 & = 1 \\ 0.5x_1 - 2x_2 + 0.5x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 & = 1 \\ 0x_1 + 0.5x_2 - 2x_3 + 0.5x_4 + 0x_5 + 0x_6 & = 1 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0.5x_3 - 2x_4 + 0.5x_5 + 0x_6 & = 1 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0.5x_4 - 2x_5 + 0.5x_6 & = 1 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0.5x_5 - 2x_6 & = 1 \end{cases}.$$

Como há convergência para ambos os métodos, podemos utilizar qualquer um deles. Vamos utilizar os dois métodos, com o vetor inicial $x^{(0)} = (-1, -1, -1, -1, -1, -1)^t$ e com os seguintes critérios de parada: $||r^{(k)}|| < \epsilon_1 = 10^{-2}$ e $dr^{(k)} < \epsilon_2 = 10^{-1}$.

(i) Utilizando o método de Jacobi, temos o sistema linear iterativo:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} & = 0.25(x_2^{(k)} - 2) \\ x_2^{(k+1)} & = 0.25(x_1^{(k)} + x_3^{(k)} - 2) \\ x_3^{(k+1)} & = 0.25(x_2^{(k)} + x_4^{(k)} - 2) \\ x_4^{(k+1)} & = 0.25(x_3^{(k)} + x_5^{(k)} - 2) \\ x_5^{(k+1)} & = 0.25(x_4^{(k)} + x_6^{(k)} - 2) \\ x_6^{(k+1)} & = 0.25(x_5^{(k)} - 2) \end{cases}.$$

Fazendo a primeira iteração, temos

$$\begin{cases} x_1^{(1)} & = 0.25(x_2^{(0)} - 2) = 0.25(-1-2) = -0.75 \\ x_2^{(1)} & = 0.25(x_1^{(0)} + x_3^{(0)} - 2) = 0.25(-1-1-2) = -1 \\ x_3^{(1)} & = 0.25(x_2^{(0)} + x_4^{(0)} - 2) = 0.25(-1-1-2) = -1 \\ x_4^{(1)} & = 0.25(x_3^{(0)} + x_5^{(0)} - 2) = 0.25(-1-1-2) = -1 \\ x_5^{(1)} & = 0.25(x_4^{(0)} + x_6^{(0)} - 2) = 0.25(-1-1-2) = -1 \\ x_6^{(1)} & = 0.25(x_5^{(0)} - 2) = 0.25(-1-2) = -0.75 \end{cases}.$$

Então, $x^{(1)} = (-0.75, -1, -1, -1, -1, -0.75)^t$. Verificando os testes de parada, temos $||r^{(1)}|| = 0.125 > 10^{-2} = \epsilon_1$ e $dr^{(1)} = 0.25 > 10^{-1} = \epsilon_2$.

Como a tolerância não foi atingida, faremos outra iteração. Dessa forma, após 4 iterações, temos a solução aproximada dada por:

$$\tilde{x} = (-0.7344, -0.9297, -0.9805, -0.9805, -0.9297, -0.7344)^t.$$

(ii) Utilizando o método de Gauss-Seidel, temos o sistema linear iterativo:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} & = 0.25(x_2^{(k)} - 2) \\ x_2^{(k+1)} & = 0.25(x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)} - 2) \\ x_3^{(k+1)} & = 0.25(x_2^{(k+1)} + x_4^{(k)} - 2) \\ x_4^{(k+1)} & = 0.25(x_3^{(k+1)} + x_5^{(k)} - 2) \\ x_5^{(k+1)} & = 0.25(x_4^{(k+1)} + x_6^{(k)} - 2) \\ x_6^{(k+1)} & = 0.25(x_5^{(k+1)} - 2) \end{cases}.$$

Fazendo a primeira iteração, temos

$$\begin{cases} x_1^{(1)} & = 0.25(x_2^{(0)} - 2) = 0.25(-1-2) = -0.75 \\ x_2^{(1)} & = 0.25(x_1^{(1)} + x_3^{(0)} - 2) = 0.25(-0.75-1-2) = -0.9375 \\ x_3^{(1)} & = 0.25(x_2^{(1)} + x_4^{(0)} - 2) = 0.25(-0.9375-1-2) = -0.9844 \\ x_4^{(1)} & = 0.25(x_3^{(1)} + x_5^{(0)} - 2) = 0.25(-0.9844-1-2) = -0.9961 \\ x_5^{(1)} & = 0.25(x_4^{(1)} + x_6^{(0)} - 2) = 0.25(-0.9961-1-2) = -0.9990 \\ x_6^{(1)} & = 0.25(x_5^{(1)} - 2) = 0.25(-0.9990-2) = -0.7498 \end{cases}.$$

Então, $x^{(1)} = (-0.75, -0.9375, -0.9844, -0.9961, -0.9990, -0.7498)^t$. Verificando os testes de parada, temos $||r^{(1)}|| = 0.1251 > 10^{-2} = \epsilon_1$ e $dr^{(1)} = 0.2502 > 10^{-1} = \epsilon_2$.

Como a tolerância não foi atingida, faremos outra iteração. Dessa forma, após 3 iterações, temos a solução aproximada dada por:

$$\tilde{x} = (-0.7324, -0.9285, -0.9809, -0.9793, -0.9284, -0.7321)^t.$$

(1.3) Utilizando a definição dos elementos da matriz A, o sistema linear $Ax = b$ pode ser escrito como

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Devemos verificar se a matriz A satisfaz o critério das linhas, ou seja, se $\alpha = \max \alpha_k < 1$, $\forall 1 \leq k \leq n$, em que $\alpha_k = \frac{1}{|a_{kk}|} \sum_{j=1, n \neq k} |a_{kj}|$. Então, para a matriz A dada, temos:

$$\alpha_1 = \tfrac{2}{2} = 1, \qquad \alpha_2 = \tfrac{2+2}{2} = 2, \qquad \alpha_3 = \tfrac{2+2}{2} = 2$$
$$\alpha_4 = \tfrac{2+2}{2} = 2 \qquad \alpha_5 = \tfrac{2+2}{2} = 2 \qquad \alpha_6 = \tfrac{2}{2} = 1.$$

Logo, para $1 \leq k \leq 6$, temos que $\alpha = \max \alpha_k = 2 > 1$ e podemos concluir que não há convergência para o método de Jacobi.

Vamos verificar se a matriz A satisfaz o critério de Sassenfeld:

$$\beta_1 = \tfrac{2}{2} = 1, \qquad \beta_2 = \tfrac{2\beta_1+2}{2} = 2, \qquad \beta_3 = \tfrac{2\beta_2+2}{2} = 3,$$
$$\beta_4 = \tfrac{2\beta_3+2}{2} = 4 \qquad \beta_5 = \tfrac{2\beta_4+2}{2} = 5 \qquad \beta_6 = \tfrac{2\beta_5}{2} = 5.$$

Como $\beta = \max \{\beta_j\} = 5 > 1$, concluímos que a sequência $\{x^{(k)}\}$ gerada não é convergente quanto ao método de Gauss-Seidel.

Questão 2: Dado o sistema não linear

$$(\star) \qquad \begin{cases} (x-3)^2 + (y+1)^2 = 16 \\ y^2 = x - 1 \end{cases} \qquad \text{pede-se:}$$

a) Verifique graficamente quantas são as soluções do sistema não linear $(\star)$.

b) Escreva um código computacional do método de Newton (*em uma linguagem de programação de sua escolha*) para calcular as soluções aproximadas do sistema $(\star)$, usando o critério de parada $||F(x^{(k)}||_\infty < 10^{-2}$.

c) Em relação ao item (b) faça, para cada iteração k, a impressão das soluções calculadas, imprimindo ao final o número total de iterações para o qual o critério de parada foi satisfeito.

Solução:

a) Devemos verificar os pontos em que as funções $f_1(x,y) = (x-3)^2+(y+1)^2-16$ e $f_2(x,y) = y^2-x+1$ se interseptam:

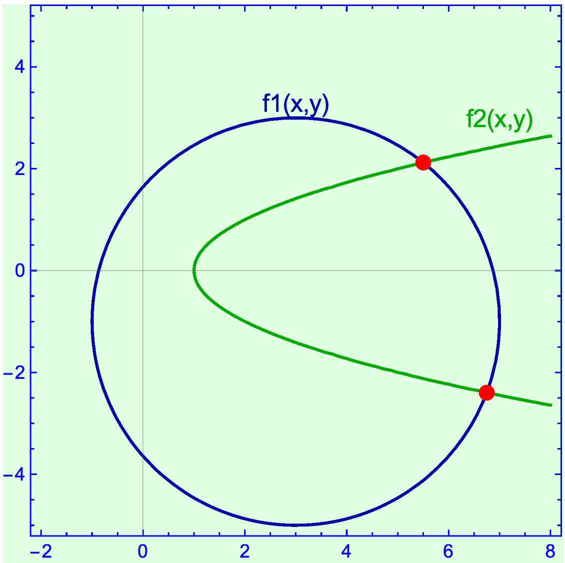

Figura 1: Gráficos das funções $f_1(x,y)$ e $f_2(x,y)$ e os pontos de intersecção das mesmas.

De acordo com o gráfico da Figura 1, podemos concluir que os pontos de intersecção são $(x_1, y_1) = (5.50114, 2.12159)$ e $(x_2, y_2) = (6.74794, -2.39749)$.

b) Código computacional do método de Newton, na linguagem do Octave, com o critério de parada $||F(x^{(k)}||_\infty < 10^{-2}$:

```
F = input('Entre com a funcao:');
JF = input('Entre com a matriz Jacobiana:');
x0= input('Entre com o vetor x inicial:');
TOL= input('Entre com a tolerancia:');
kmax= input('Entre com o numero maximo de iteracoes:');

function [x] = newton(F,JF,x0,TOL,kmax)
  x = x0
  k = 1
  #iteracoes
  while (k <= kmax)
    #iteracao de Newton
    delta = -inv(JF(x))*F(x)
    x = x + delta
```

```
    #criterio de parada
    if (norm(delta,'inf')<TOL) then
      return
    endif
    k = k+1
  endwhile
  error('Num. de iter. max. atingido!')
endfunction
```

c) Utilizando o vetor inicial $x^{(0)} = (5,2)^t$, temos

Iteração	$x^{(k)}$	$\|\|F(x^{(k)}\|\|_\infty$
0	$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 5.0000 \\ 2.0000 \end{pmatrix}$	3.0000
1	$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 5.5455 \\ 2.1364 \end{pmatrix}$	0.3166
2	$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 5.5014 \\ 2.1219 \end{pmatrix}$	0.0033

Dessa forma, após 2 iterações, temos a solução aproximada: $\tilde{x} = (5.5014, 2.1219)^t$.