MS211, Cálculo Numérico, Turmas L, M
Segundo Semestre de 2020, UNICAMP

Resolução Atividade 03

Entrega dos exercícios SOMENTE por Google Classroom até terça 27/10/2020. Os exercícios podem ser desenvolvidos em grupos de até 3 (três) membros. Escreva o nome e o RA dos membros do grupo em todas as folhas, com destaque na primeira página. É aconselhável que somente um membro por grupo faça a entrega da atividade completa do grupo no Google Classroom.

(1) Qual dos seguintes sistemas lineares são consistentes? No caso de ser consistente, quantas soluções possuem, uma única solução ou infinitas soluções? Em qualquer caso, sendo o sistema consistente ou não, justifique e motive a sua resposta, podendo usar gráficos auxiliares, cálculo do determinante, e demais justificativas aderentes ao exercício proposto.

1.a) $\begin{cases} x+2y=2 \\ -2x+y=2 \end{cases}$ 1.b) $\begin{cases} x-y=2 \\ 2x-2y=4 \end{cases}$ 1.c) $\begin{cases} x+y=2 \\ 3x+3y=-5 \end{cases}$

1.d) $\begin{cases} x-y-z=2 \\ 2x+y+z=0 \end{cases}$ 1.e) $\begin{cases} x+y-z=2 \\ -x-y+z=0 \\ x+2y-3z=4 \end{cases}$ 1.f) $\begin{cases} 3x+2y=2 \\ 4x+y=4 \\ x-4y=1 \end{cases}$

Resolução (1):

1.a) $\begin{cases} x+2y=2 \\ -2x+y=2 \end{cases}$

O sistema tem $m=2$ linhas e $n=2$ colunas portanto Então para verificar se o sistema admite uma única solução temos de analisar o determinante da matriz dos coeficientes $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Temos que $\det(A)=1+4=5\neq 0$ portanto o sistema é consistente e admite uma única solução.

1.b) $\begin{cases} x-y=2 \\ 2x-2y=4 \end{cases}$ tem a matriz A com a segunda linha que é igual a duas vezes a primeira linha. O determinante de $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ é então nulo. Portanto o sistema não admite uma única solução. Pode admitir infinitas soluções se $posto(A)=posto(A|b)=r$, observamos que $posto(A)=1$ porque as duas linhas são linearmente dependentes, e $posto(A|b)=1$ também porque a segunda linha de $(A|b)$ é duas vezes a primeira. Portanto o sistema é consistente e tem $\infty^{n-r}=\infty^{2-1}=\infty^1$ soluções, do tipo $(x,y)=(x,x-2)$ para cada $x\in\mathbb{R}$.

1.c) $\begin{cases} x+y=2 \\ 3x+3y=-5 \end{cases}$ tem matriz A com a segunda linha que é igual a três vezes a primeira linha. O determinante de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ é então nulo, e o sistema não pode ter uma única solução. Temos então $posto(A) = 1$. Em vez $posto(A|b) = 2$ porque a suas primeira e terceira coluna são linearmente independentes, (assim como a segunda e a terceira coluna). Então sendo $posto(A) \neq posto(A|b)$ o sistema não admite nenhuma solução. Este sistema não é consistente.

1.d) $\begin{cases} x-y-z=2 \\ 2x+y+z=0 \end{cases}$ tem $m = 2$ linhas e $n = 3$ incognitas, analisamos o $posto(A)$ e o $posto(A|b)$. Sabemos que $posto(A) \leq \min m, n = 2$ e será igual ao numero de linhas linearmente independentes de A que será dois, sendo que $(2, 1, 1) \neq k(1, -1, -1)$. Então $posto(A) = 2$.
Também é facil verificar que $posto(A|b) = 2$, sendo que $(2, 1, 1, 0) \neq k(1, -1, -1, 2)$ e então temos que $r = posto(A) = posto(A|b) = 2$: o sistema é consistente e tem $\infty^{n-r} = \infty^{3-2} = \infty^1$ soluções. Para determinar as soluções do sistema substituímos a primeira eq. $x = y + z + 2$ na segunda equação e obtemos $2y + 2z + 4 + y + z = 0$ ou seja $3y = -3z - 4$ e então $y = -z - \frac{4}{3}$. Usando esta ultima expressão de y na primeira equação obtemos $x = -z - \frac{4}{3} + z + 2 = \frac{2}{3}$. e então a primeira eq. muda em $y + z = -2 + x = -2 + \frac{2}{3} = -\frac{4}{3}$ ou seja $y = -z - \frac{4}{3}$ e a segunda tem de ser necessariamente a mesma obtemos $y + z = -2x = -\frac{4}{3}$. Daqui podemos dizer que as infinitas soluções do sistema são $(x, y, z) = (\frac{2}{3}, -z - \frac{4}{3}, z)$. Ousseja para cada $z \in \mathbb{R}$ $(\frac{2}{3}, -z - \frac{4}{3}, z)$ são soluções do sistema

1.e) $\begin{cases} x+y-z=2 \\ -x-y+z=0 \\ x+2y-3z=4 \end{cases}$

Tem $m = n = 3$. A matriz A associada tem $det(A) = 0$ então o sistema não pode ter uma única solução. Pode se verificar que $posto(A) = 2$ e $posto(A|b) = 3$ porque a suas três linhas são linearmente independentes. Então o sistema é inconsistente.

1.f) $\begin{cases} 3x+2y=2 \\ 4x+y=4 \\ x-4y=1 \end{cases}$ Tem $m = 3$ e $n = 2$. Observamos que $posto(A|b) = 3$ e então necessariament $posto(A) \neq posto(A|b)$ porque $posto(A) \leq \min m, n = 2$ então o sistema não é consistente.

(2) Considere o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} 1.1x_1 + 0.2x_2 + 5x_3 = 6.3 \\ 1.11x_1 + 0.2x_2 + 6x_3 = 7.31 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

Resolva este sistema linear na **aritmética finita com 3 dígitos significativos e com arredondamento** $FP(10, 3, -9, 9)$ e usando os seguintes **Métodos Diretos**, conforme cada item:

2.a) Método de Eliminação de Gauss **com pivoteamento parcial**.

2.b) Método de Eliminação de Gauss **sem pivoteamento**.

2.c) Compare as soluções obtidas nos itens 2.a) e 2.b) com a solução exata $(1, 1, 1)$.

2.d) Porque é esperado que o método de **pivotamento parcial** forneça uma solução mais acurada?

MUITO IMPORTANTE: Não é necessário escrever um **código computacional** para o método de Eliminação de Gauss **com ou sem pivotamento**. Contudo, pede-se que **TODAS** as etapas k sejam descritas em detalhes, apresentando os valores dos coeficientes da matriz $A^{(k)}$ e do vetor $b^{(k)}$ obtidos, além da solução final em cada caso.

Resolução (2):

(2.a) Observamos que $|a_{21}| > |a_{11}|$ portanto o pivot será a_{21}, trocamos a segunda linha com a primeira obtemos a estrutura inicial

$$(A^{(0)}|b^{(0)}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1.11 & 0.2 & 6 & 7.31 \\ 1.1 & 0.2 & 5 & 6.3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Agora efetuamos os passos de eliminação de Gauss para eliminar os coeficientes por baixo da diagonal na primeira coluna em $FP(10, 3, -9, 9)$:

Multiplicador $m_{21} = \frac{a_{21}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} = \frac{1.1}{1.11} = 0.991$

$a_{22}^{(1)} = 0.2 - 0.991 * 0.2 = 0.2 - 0.198 = 0.002 = 2 \cdot 10^{-3}$;

$a_{23}^{(1)} = 5 - 0.991 * 6 = 5 - 5.95 = -0.95$;

$b_2^{(1)} = 6.3 - 0.991 * 7.31 = 6.3 - 7.24 = -0.94$

Multiplicador $m_{31} = \frac{a_{31}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} = \frac{1}{1.11} = 0.901$

$a_{32}^{(1)} = 1 - 0.901 * 0.2 = 0.2 - 0.180 = 0.82$;

$a_{33}^{(1)} = 1 - 0.901 * 6 = 1 - 5.41 = -4.41$;

$b_3^{(1)} = 3 - 0.901 * 7.31 = 3 - 6.59 = -3.59$

A matriz resultante depois este primeiro passo é então

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1.11 & 0.2 & 6 & 7.31 \\ 0 & 2 \cdot 10^{-3} & -0.95 & -0.94 \\ 0 & 0.82 & -4.41 & -3.59 \end{array}\right)$$

Observamos que $|a_{32}^{(1)}| > |a_{22}^{(1)}|$ portanto antes de efetuar o segundo passo temos de trocar a terceira linha com a segunda

$$(A^{(1)}|b^{(1)}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1.11 & 0.2 & 6 & 7.31 \\ 0 & 0.82 & -4.41 & -3.59 \\ 0 & 2 \cdot 10^{-3} & -0.95 & -0.94 \end{array}\right)$$

Agora aplicamos o segundo passo de eliminação de Gauss:

$m_{32} = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{0.82} = 2.44 \cdot 10^{-3}$

$a_{33}^{(2)} = -0.95 - 2.44 \cdot 10^{-3} \cdot (-4.41) = -0.95 + 0.0108 = -0.939$
$b_3^{(2)} = -0.94 - 2.44 \cdot 10^{-3} \cdot (-3.59) = -0.94 + 8.76 \cdot 10^{-3} = -0.931$ Então apos o segundo passo obtemos

$$(A^{(2)}|b^{(2)}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1.11 & 0.2 & 6 & 7.31 \\ 0 & 0.82 & -4.41 & -3.59 \\ 0 & 0 & -0.939 & -0.931 \end{array}\right)$$

Deste sistema triangular superior obtemos:
$x_3 = \frac{-0.931}{-0.939} = 0.991$
$x_2 = \frac{-3.59+4.41 \cdot x_3}{0.82} = \frac{-3.59+4.41 \cdot 0.991}{0.82} = \frac{-3.59+4.37}{0.82} = \frac{0.78}{0.82} = 0.951$
$x_1 = \frac{7.31-6x_3-0.2x_2}{1.11} = \frac{7.31-5.95-0.19}{1.11} = \frac{1.36-0.19}{1.11} = \frac{1.17}{1.11} = 1.05$. Então obtemos com pivotamento a solução $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.05 \\ 0.951 \\ 0.991 \end{pmatrix}$

(2.b) Supondo de trabalhar somente em $FP(10, 3, -9, 9)$ com arredondamento. Se não aplicarmos o pivotamento teremos no primeiro passo os multiplicadores

$$m_{21} = \frac{1.11}{1.1} = 1.01; \quad m_{31} = \frac{1}{1.1} = 0.909.$$

Agora podemos determinar os coeficientes no primeiro passo de eliminação de Gauss.
$a_{22}^{(1)} = 0.2 - 1.01 * 0.2 = 0.2 - 0.202 = -0.002 = -2 \cdot 10^{-3}$;
$a_{23}^{(1)} = 6 - 1.01 * 5 = 6 - 5.05 = 0.95$;
$b_2^{(1)} = 7.31 - 1.01 * 6.3 = 7.31 - 6.36 = 0.95$
$a_{32}^{(1)} = 1 - 0.909 * 0.2 = 0.2 - 0.182 = 0.818$;
$a_{33}^{(1)} = 1 - 0.909 * 5 = 1 - 4.55 = -3.55$;
$b_3^{(1)} = 3 - 0.909 * 6.3 = 3 - 5.73 = -2.73$
Portanto

$$(A^{(1)}|b^{(1)}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1.1 & 0.2 & 5 & 6.3 \\ 0 & -2 \cdot 10^{-3} & 0.95 & 0.95 \\ 0 & 0.818 & -3.55 & -2.73 \end{array}\right)$$

Para aplicar o segundo passo calculamos o multiplicador m_32:

$$m_{32} = \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} = -\frac{0.818}{0.2 \cdot 10^{-2}} = -409.$$

Assim podemos determinar $a_{33}^{(2)} = -3.55 + 409 \cdot 0.95 = -3.55 + 389 = 385$ e $b_3^{(2)} = -2.73 + 409 \cdot 0.95 = -2.73 + 389 = 386$

$$(A^{(2)}|b^{(2)}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1.1 & 0.2 & 5 & 6.3 \\ 0 & -2 \cdot 10^{-3} & 0.95 & 0.95 \\ 0 & 0 & 385 & 386 \end{array}\right)$$

Assim se resolvemos o resultante sistema triangular superior obtemos $x_3 = \frac{386}{385} = 1.0026$ 1, $x_2 = \frac{0.95-0.95*1}{-0.002} = 0$, $x_1 = \frac{6.3-5 \cdot 1-0.2 \cdot 0}{1.1} = \frac{1.3}{1.1} = 1.18$. Então a solução obtida com o método de eliminação de Gauss com pivotamento é $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.18 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(2.c) É facil provar que $[1,1,1]$ é a solução exata do sistema Respeito a tal solução temos os seguintes erros relativos em norma infinito (norma do maximo)

- Com o pivotamento (ver item 2.a) obtemos a solução numérica $\bar{x} = \begin{pmatrix} 1.05 & 0.951 & 0.991 \end{pmatrix}^t$, o erro relativo respeito x exata é

$$\frac{\|\bar{x}-x\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \|\bar{x}-x\|_\infty = \max|1.05-1|, |0.951-1|, |0.991-1| = 0.051 = 5.1\%$$

  Ou se avaliamos o erro relativo de x respeito o valor aproximado

$$\frac{\|\bar{x}-x\|_\infty}{\|\bar{x}\|_\infty} = \frac{\|\bar{x}-x\|_\infty}{1.05} = \frac{\max|1.05-1|, |0.951-1|, |0.991-1|}{1.05} = \frac{0.051}{1.05} = 0.04857 = 4.857\%$$

- Sem pivotamento (ver item 2.b) obtemos a solução numérica $\bar{x} = \begin{pmatrix} 1.18 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t$ o erro relativo respeito x exata é

$$\frac{\|\bar{x}-x\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \|\bar{x}-x\|_\infty = \max|1.18-1|, |0-1|, |1-1| = 1 = 100\%$$

  Um erro relativo grande obtem-se também se avaliamos o erro relativo respeito a solução numérica

$$\frac{\|\bar{x}-x\|_\infty}{\|\bar{x}\|_\infty} = \frac{\|\bar{x}-x\|_\infty}{1.18} == \frac{\max|1.18-1|, |0-1|, |0.991-1|}{1.18} = \frac{1}{1.18} = 0.84746 = 84.746\%$$

Portanto o erro maior acontece quando usamos o método de eliminação de Gauss sem pivotamento.

(2.d) É esperado que o método de eliminação de Gauss com pivotamento produz resultados mais acurados.

Isso porque o método de eliminação de Gauss sem pivotamento resulta ser instável quando pelo menos um dos coeficientes $a_{kk}^{(k-1)}$ é próximo de zero, ou resulta ser demasiadamente pequeno em valor absoluto respeito aos outros coeficientes da mesma coluna . No nosso caso estamos nesta situação porque $|a_{22}^1| = 2\cdot 10^{-3}$ é muito menor de $a_{32}^{(1)}$.

O problema aparece no calculo dos multiplicadores $m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}$ pode levar a um grande erro de arredondamento no calculo dos coeficientes da matriz $A^{(k)}$.
Notamos em geral que quando $y = a_{kk}^{(k-1)}$ é próximo de zero (o muito pequeno em valor absoluto respeito os valores da mesma coluna) o multiplicador m_{ik} usado para transformar a matriz $A^{(k-1)}$ na matriz $A^{(k)}$ pode ser demais grande respeito os outros valores da matriz, e isso pode levar a um sistema $A^{(k)}x = b^{(k)}$ que não é equivalente ao sistema inicial. Em particular o produto $|m_{ik}a_{kj}^{(k-1)}|$ (no nosso caso veja item 2b $|m_{32}a_{23}^1| = |-409\cdot 0.95| = 389$) resultar ser demais grande respeito o $|a_{ij}^{(k-1)}|$ (no nosso caso $|a_{33}^{(1)}| = |-3.55| = 3.55$), levando a ter na aritmetica finita considerada $a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - m_{ik}a_{kj}^{(k-1)} \approx -m_{ik}a_{kj}^{(k-1)}$. Analogamente $b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - m_{ik}b_k^{(k-1)} \approx -m_{ik}b^{(k-1)}$
(No nosso caso obtemos $a_{33}^2 = 385 \approx 389$, $b_3^{(2)} = 386 \approx -m_{ik}b^{(k-1)} = 389$.) É como

se estivessemos resolvendo um sistema com $a_{ij}^{(k-1)} = 0$ e $b_i^{(k-1)} = 0$, ou seja um sistema singular porque é como se a linha i de $A^{(k)}$, e $b^{(k)}$ for nula...
O método neste caso falhará no encontrar a solução de $Ax = b$.

(3) Considere a matriz quadrada de dimensão 3 a seguir:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

3.a) Determine a fatoração LU associada a matriz A.

3.b) Usando a fatoração LU do item 3.a), resolva os dois seguintes sistemas lineares:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = -1 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 1 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 5 \end{cases}$$

3.c) Descreva como determinar a inversa de A usando a fatoração LU do item 3.a).

3.d) Qual é o custo computacional necessário para obter a fatoração LU de A? Justifique sua resposta.

Resolução (3):

(3.a) Aplicamos a eliminação de Gauss para chegar a fatoração LU onde

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 \end{pmatrix} \quad U = A^{(2)} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} \end{pmatrix}$$

$m_{21} = \dfrac{a_{21}}{a_{11}} = -2$, $m_{31} = \dfrac{a_{31}}{a_{11}}$
$a_{22}^{(1)} = a_{22} - m_{21}a_{12} = 2$, $a_{23}^{(1)} = a_{23} - m_{21}a_{13} = 5$
$a_{32}^{(1)} = a_{32} - m_{31}a_{12} = 4$, $a_{33}^{(1)} = a_{33} - m_{31}a_{13} = -5$
$m_{32} = \dfrac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} = 2$, $a_{33}^{(2)} = a_{33}^{(1)} - m_{32}a_{23}^{(1)} = -15.$
Portanto

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -15 \end{pmatrix}$$

(3.a) Podemos resolvemos os sistemas em dois passos usando a fatoração LU já obtida. Assim teremos de resolver somente dois sistemas triangulares

$$\begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$$

No primeiro sistema

$$Ly = b \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{array}{l} y_1 = b_1 = -1 \\ y_2 = b_2 + 2y_1 = b_2 + 2b_1 = 2 - 2 = 0 \\ y_3 = b_3 - y_1 - 2y_2 = b_3 - b_1 - 2(b_2 + 2b_1) = 0 + 1 = 1 \end{array}$$

$$Ux = y \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} x_3 = -\frac{y_3}{15} = -\frac{1}{15} \\ x_2 = \frac{y_2 - 5x_3}{2} = \frac{0+\frac{1}{3}}{2} = \frac{1}{6} \\ x_1 = y_1 - 2x_3 = -1 + \frac{2}{15} = -\frac{13}{15} \end{array}$$

No segundo sistema obtemos

$$\begin{array}{l} y_1 = b_1 = 1 \\ y_2 = b_2 + 2y_1 = b_2 + 2b_1 = -2 + 2 = 0 \\ y_3 = b_3 - y_1 - 2y_2 = b_3 - b_1 - 2(b_2 + 2b_1) = 5 - 1 - 2(-2 + 2) = 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x_3 = -\frac{y_3}{15} = -\frac{4}{15} \\ x_2 = \frac{y_2 - 5x_3}{2} = \frac{0+\frac{20}{15}}{2} = \frac{2}{3} \\ x_1 = y_1 - 2x_3 = 1 + \frac{8}{15} = \frac{23}{15} \end{array}$$

(3.c) Para determinar a inversa A^{-1} da matriz A com a fatoração LU obseramos que $A \cdot A^{-1} = I = [e_1, \dots, e_n]$ onde $e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^t$ são as colunas i da matriz identidade. É possivel ver que indicadas com b_i as colunas da matriz inversa A^{-1} de A temos que $Ab_j = e_j$. Portanto para obter a matriz inversa é suficiente resolver n sistemas lineares com a mesma matriz de coeficientes A do tipo

$$Ab_j = e_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Podemos usar então a mesma fatoração LU de A em todos estes sistemas e então obtemos cada coluna b_i de A^{-1} em dois passos

$$\begin{cases} Ly^{(j)} = e_j \\ Ub_j = y^{(j)} \end{cases} \qquad j = 1, \dots, n$$

(3.d) O método de eliminação de Gauss pode ser usado para achar a fatoração LU da matriz dos coefficientes A do sistema:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & \cdots & m_{n\,n-1} & 1 \end{pmatrix};$$

$$U = A^{(n-1)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n}^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{kk}^{(k-1)} & \cdots & a_{kn}^{(k-1)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & 0 & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{nn}^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Portanto o custo computacional para achar a fatoração LU é aquele do método de eliminação de Gauss

$$\frac{2}{3}n^3 + \frac{n^2}{2} - \frac{7}{6}n = O(n^3).$$

Portanto a vantagem computacional da fatoração respeito o método de eliminação de Gauss reside somente quando queremos resolver mais sistemas lineares do tipo $Ax = b$ com a mesma A e diferentes vetores b.