

Resolução Atividade 02

Entrega dos exercícios SOMENTE por Google Classroom até terça 13/10/2020. Os exercícios podem ser desenvolvidos em grupos de até 3 (três) membros. Escreva o nome e o RA dos membros do grupo em todas as folhas, com destaque na primeira página. É aconselhável que somente um membro por grupo faça a entrega da atividade completa do grupo no Google Classroom. Escreva os resultados numéricos usando até 5 dígitos significativos.

- (1) Considere as duas funções reais $f(x) = x^3 - 4x + 2$ e $g(x) = -\frac{1}{2}(x - 2) + 1$. Pede-se:
- a) Desenhar o esboço dos gráficos das funções definidas $f(x)$ e $g(x)$ e determinar (observando seus gráficos) quantas possíveis interseções têm estas funções.
 $\text{vspace}1\text{mm}$
 - b) Escreva algoritmos, e os correspondente códigos computacionais (em uma linguagem de sua escolha), para executar os métodos da *bisseção* e da *falsa posição* para calcular uma interseção das funções $f(x)$ e $g(x)$ presente em algum intervalo de input $[a, b]$ (especificado pelos estudantes), a menos de uma tolerância $\varepsilon > 0$, sendo esta também dada como input do algoritmo.
 - c) Encontrar o ponto (z, w) de interseção de $f(x)$ e $g(x)$ com a maior abscissa z , usando ambos os métodos da *bisseção* e da *falsa posição*, a menos de uma tolerância $\varepsilon = 10^{-3}$. Ou seja, calcular o x_k por ambos os métodos tal que $|x_k - z| < \varepsilon$.
 - d) Responda (em vista dos itens (1.a)-(1.c)), qual método conseguiu calcular tal interseção com um número menor de iterações? Era o método esperado? Justifique e motive a sua resposta, podendo usar gráficos auxiliares, tabelas, desempenho no tempo de execução computacional dos métodos em sua máquina, entre outras justificativas aderentes ao exercício proposto.

Resolução (1):

- a) Observando os gráficos do polinômio de terceiro grau $f(x)$ e da reta $g(x)$ temos exatamente três interseções em $[-4, 4]$ e não podemos ter mais interseções fora deste intervalo, sendo o polinômio $f(x)$ vai a $-\infty$ para $x \rightarrow -\infty$ e vai a $+\infty$ para $x \rightarrow \infty$. Em vez a reta $g(x)$ é sempre decrescente.
- b) Observamos que um ponto (z, w) para ser interseção das funções $f(x)$ e $g(x)$ em de ter uma abscissa z tal que $f(z) = g(z)$. u equivalentemente tem de ser tal que posto $d(x) := f(x) - g(x)$ vale que $d(z) = 0$. Portanto o algoritmo do método da biseção para encontrar a interseção de f e g é igual ao algoritmo para encontrar com o método da biseção um zero de $h(x) = f(x) - g(x) = x^3 - 4x + 2 - (-0.5(x - 2) + 1) = x^3 - 4x + 0.5x - 1 - 1 + 2 = x^3 - 3.5x$.

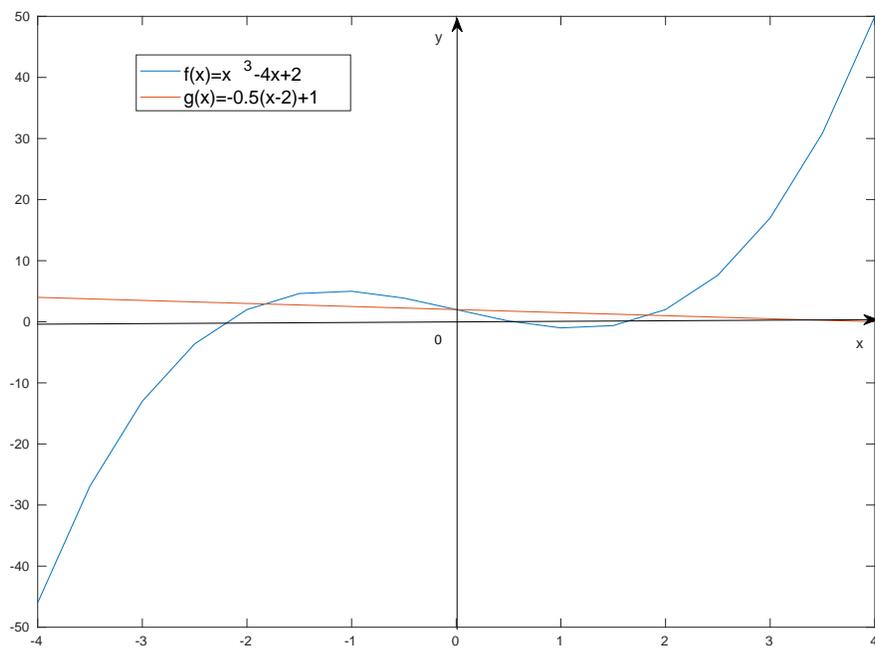


Figura 1: Gráfico das funções $f(x)$ e $g(x)$

Algorithm 1 Algoritmo do método da Bissecção

Require: Funções f, g Intervalo $[a, b]$, Tolerância ε

```
1:  $h \leftarrow f - g$ ;  
2:  $x \leftarrow (a + b)/2$ ;  
3: while do  $|b - a| \geq \varepsilon$   
4:   if  $h(x) * h(b) < 0$  then  
5:      $a \leftarrow x$ ;  
6:   else  $b \leftarrow x$ ;  
7:   end if  
8:    $x \leftarrow (a + b)/2$   
9: end while  
10: return  $x$ 
```

Listing 1: Código em Matlab do método da bissecção

```
function x=Bisseccao(f,g,a,b,epsilon)  
  
h=@(x)f(x)-g(x);  
y=(a+b)/2;  
  
dif=abs(b-a);  
while dif>=epsilon  
    if h(a)*h(y)<0  
        b=y;  
    else  
        a=y;  
    end  
    y=(a+b)/2  
end  
  
end
```

Algorithm 2 Algoritmo do método da Falsa posição

Require: Funções f, g Intervalo $[a, b]$, Tolerância ε

```
 $h \leftarrow f - g$ ;  
 $x \leftarrow (a * h(b) - b * h(a)) / (h(b) - h(a))$ ;  
while do  $|b - a| \geq \varepsilon$   
    if  $h(x) * h(b) < 0$  then  
         $a \leftarrow x$ ;  
    else  $b \leftarrow x$ ;  
    end if  
     $x \leftarrow (a * h(b) - b * h(a)) / (h(b) - h(a))$   
end while  
return  $x$ 
```

Listing 2: Código em Matlab do método da falsa posição

Tabela 1: Tabela das iterações obtidas com o método da bissecção

k	a_k	b_k	$ b_k - a_k $	x_k
1	1.0000000	2.0000000	1.0000000	1.5000000
2	1.5000000	2.0000000	0.5000000	1.7500000
3	1.7500000	2.0000000	0.2500000	1.8750000
4	1.7500000	1.8750000	0.1250000	1.8125000
5	1.8125000	1.8750000	0.0625000	1.8437500
6	1.8437500	1.8750000	0.0312500	1.8593750
7	1.8593750	1.8750000	0.0156250	1.8671875
8	1.8671875	1.8750000	0.0078125	1.8710938
9	1.8671875	1.8710938	0.0039062	1.8691406
10	1.8691406	1.8710938	0.0019531	1.8701172
11	1.8701172	1.8710938	0.0009766	1.8706055

```
function x=FalsaPos(f,g,a,b,epsilon)

h=@(x)f(x)-g(x);
y=(a*h(b)-b*h(a))/(h(b)-h(a));

dif=abs(b-a);
while dif>=epsilon
    if h(a)*h(y)<0
        b=y;
    else
        a=y;
    end
    y= (a*h(b)-b*h(a))/(h(b)-h(a));
end

end
```

- c) Usando o gráfico do ponto 1.a observamos que a interseção (z, w) de $f(x)$ e $g(x)$ com a maior abscissa z , tem z muito próximo de 2. Portanto usamos nos métodos o seguintes extremos $a = 1, b = 3$ que é tal que o intervalo $[a, b]$ contém o zero procurado, e são tais que $h(a) * h(b) = < 0$. Um qualquer intervalo $[a, b]$ que contém somente o zero z e tal que $h(a) * h(b) < 0$ poderia ser utilizado, como por exemplo $[1.5, 2.5], [1.7, 2.2], \dots$

Usando o método da *bissecção* e *falsa posição* obtemos as iterações da tabelas em baixo até que satisfazemos o critério de precisão $|x_k - z| < \varepsilon = 10^{-3}$, note que este critério é obtido quando $|b_k - a_k| < 10^{-3}$, porque por uma propriedade destes dos métodos temos sempre $|x_k - z| < |b_k - a_k|$

Tabela 2: Tabela das iterações obtidas com o método da falsa posição

k	a_k	b_k	$ b_k - a_k $	x_k
0	1.0000000	3.0000000	2.0000000	1.2631579
1	1.2631579	3.0000000	1.7368421	1.4841583
2	1.4841583	3.0000000	1.5158417	1.6425564
3	1.6425564	3.0000000	1.3574436	1.7429204
4	1.7429204	3.0000000	1.2570796	1.8014411
5	1.8014411	3.0000000	1.1985589	1.8338822
6	1.8338822	3.0000000	1.1661178	1.8513565
7	1.8513565	3.0000000	1.1486435	1.8606224
8	1.8606224	3.0000000	1.1393776	1.8654946
9	1.8654946	3.0000000	1.1345054	1.8680452
10	1.8680452	3.0000000	1.1319548	1.8693774
11	1.8693774	3.0000000	1.1306226	1.8700723
12	1.8700723	3.0000000	1.1299277	1.8704345
13	1.8704345	3.0000000	1.1295655	1.8706233
14	1.8706233	3.0000000	1.1293767	1.8707217
15	1.8707217	3.0000000	1.1292783	1.8707730
...
50	1.870828693386958	3.0000000	1.129171306613042	1.870828693386964
51	1.870828693386964	3.0000000	1.129171306613036	1.870828693386967
52	1.870828693386967	3.0000000	1.129171306613033	1.870828693386969
53	1.870828693386969	3.0000000	1.129171306613031	1.870828693386970
54	1.870828693386970	3.0000000	1.129171306613030	1.870828693386970
55	1.870828693386970	3.0000000	1.129171306613030	1.870828693386971
56	1.870828693386970	1.870828693386971	4.440892098500626e-16	1.870828693386971

d) Com $a = 1, b = 3$, o método da Bissecção conseguiu satisfazer o critério de precisão $|b_k - a_k| < 10^{-3}$ depois 11 iterações, em vez a Falsa posição satisfazeu o mesmo critério depois 56 iterações. Esta situação não era esperada sendo que o método da falsa posição usa uma média ponderada para por o valor x_k mais próximo do extremo onde a função h toma o valor menor em valor absoluto. Aconteceu que o extremo $b = 3$ ficou fixo e o extremo a é atualizado mas procedendo muito lentamente na direção do zero $z \approx 1.87082869$. De fato o critério $|x_k - z| < 10^{-3}$ é satisfeito depois 11 iterações porque $x_{11} = 1.8700723$ mas ainda $|b_k - a_k| > 1$. Quando um extremo a_k é já bastante perto do zero acontece que a nova iteração x_k será muito próxima a este extremo, e portanto $h(x_k) \cdot h(a_k) > 0$ porque $x_k \approx a_k$ implica que $h(x_k) \approx h(a_k)$ e portanto terão o mesmo sinal. Assim na nova iteração $b_{k+1} = b_k$ e $a_{k+1} = a_k$. No nosso caso teremos $b_k = 3$ e $a_k \approx z$ mas sempre com $|b_k - a_k| > 10^{-3}$. Somente quando o x_k passará do outro lado da função h ou seja onde $h(x_k) \cdot h(b_k) > 0$ então poderemos ter um novo intervalo $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [a_k, x_k]$ com uma amplitude limitada, menor de 10^{-3} no nosso caso. Normalmente o método da falsa posição pode ser melhorado usando técnicas que mudam a construção do x_k quando um

extremo fica fixo por muitas iterações, exemplo o método de Illinois. No método de Illinois vamos dar um menor peso no extremo variavel, se o outro extremo fica fixo depois bastantes iterações, no nosso caso com a_k o extremo variavel

$$x_k = \frac{\frac{1}{2}a_k h(b_k) - b_k h(a_k)}{\frac{1}{2}h(b_k) - h(a_k)}$$

Assim o x_k vai na zona com o mesmo sinal de $h(b_k)$ permitindo de diminuir o tamanho do intervalo seguinte.

(2) Considere a função $h(x) = \sin x - x + 1$. Pede-se:

- a) Verifique graficamente ou analiticamente (analisando matematicamente a(s) derivada(s) da função $h(x)$) que esta função possui somente um zero real ξ tal que $h(\xi) = 0$. Justifique e motive a sua resposta, podendo usar gráficos auxiliares, entre outras justificativas aderentes ao exercício proposto.
- b) Use um método da classe *ponto fixo* **diferente do método de Newton** para calcular uma aproximação \bar{x} do zero (raiz ξ do item (2.a)) tal que seja satisfeito simultaneamente as duas condições computacionais típicas de critério de parada para calcular *zeros de funções reais a valores reais*, a saber: $|\bar{x} - \xi| < 10^{-2}$ e $|h(\bar{x})| < 10^{-3}$.
- c) Repetir o item anterior (2.b), mas **usando desta vez o método de Newton** e os critérios de parada: $|x_k - x_{k-1}| < 10^{-5}$ e $|h(x_k)| < 10^{-3}$.
(Sugestão: Como aproximação inicial x_0 do método de Newton, escolha o múltiplo do número $\frac{\pi}{4}$ mais próximo do zero ξ).

Resolução (2):

a)

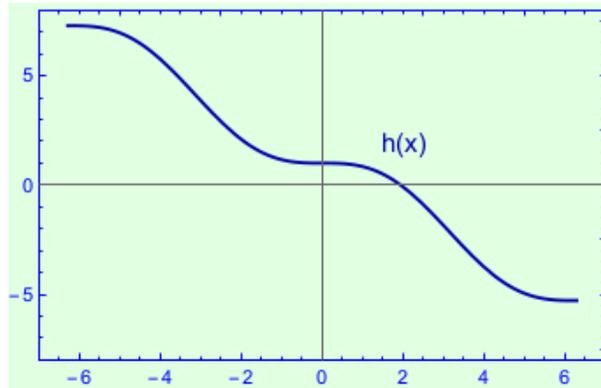


Figura 5: Gráfico da função $h(x)$.

Analisando a Figura 5, observamos que a função $h(x)$ intercepta o eixo das abcissas somente uma vez, ou seja, a função $h(x)$ possui somente um zero. Uma outra forma de analisarmos os zeros da função $h(x)$ é através da sua derivada:

$$h(x) = \sin(x) - x + 1 \quad \implies \quad h'(x) = \cos(x) - 1.$$

Como a função $\cos(x)$ é limitada entre -1 e 1 , temos que $h'(x)$ assume valores entre -2 e 0 , como visto no gráfico da Figura 6:

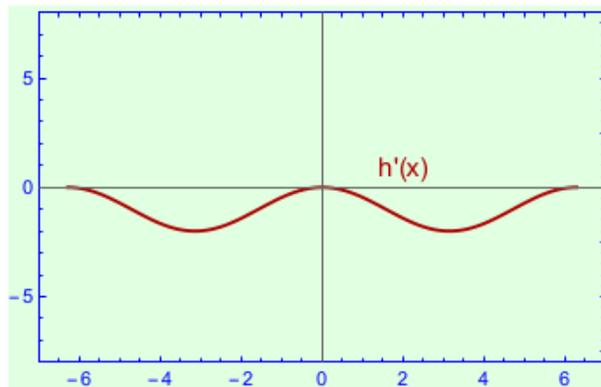


Figura 6: Gráfico da função $h'(x)$.

- b) Usamos o método do ponto fixo $x_{k+1} = \varphi(x_k)$, com $\varphi(x) = \sin(x) + 1$. Notamos que esta $\varphi(x)$ satisfaz que Isso porque $h(x) = \sin(x) - x + 1 = 0 \iff \sin(x) + 1 = x \iff \varphi(x) = x$. Sabemos do item a) que a única raiz z está no intervalo $I = [1, 3]$. Isso é fácil verificar: f é contínua, f' é constante em sinal e $h(1) = \sin(1) - 1 + 1 = 0.8415 > 0$, $h(3) = -1.8589 < 0$.

Verificamos se este intervalo é um intervalo de contração para a raiz z . Observamos que $\varphi'(x) = \cos(x)$. Sabemos em geral que $-1 \leq \cos(x) \leq 1$. E que $|\cos(x)| = 1$ para todos os $x = k\pi$ com k qualquer inteiro. Então temos satisfeita a condição de

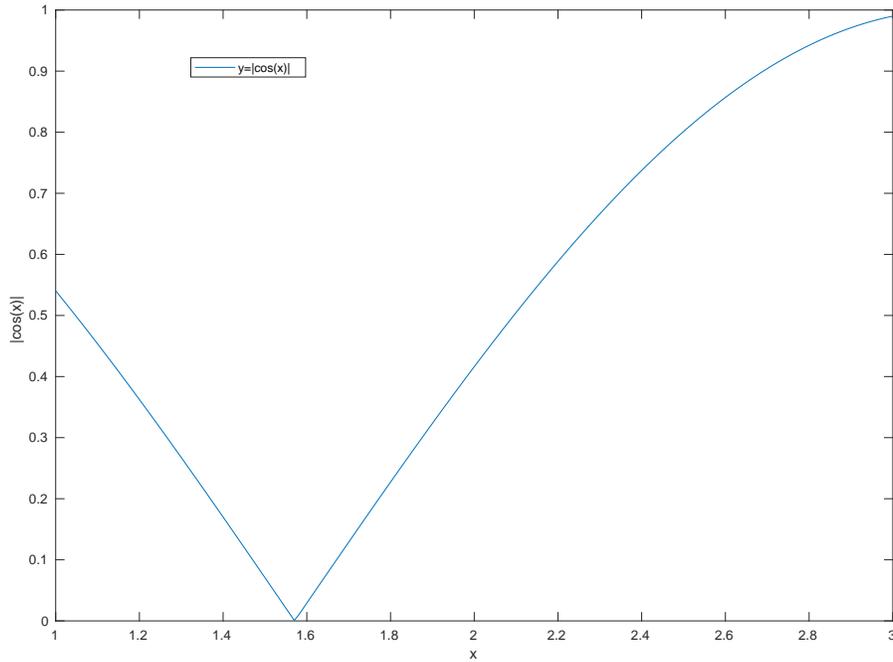


Figura 2: Gráfico da função $|\cos(x)|$

contração

$$\forall x \in I \quad |\cos(x)| < 1$$

se e só se

não existe algum múltiplo $k\pi$ de π que pertence a $[1, 3]$.

Isso acontece, sendo que $\pi \approx 3,14 > 3$ e $x = 0 = 0\pi < 1$. Portanto sendo termos que I é um intervalo de contração do método do ponto fixo $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ e então por cada $x_0 \in [1, 3]$ teremos a convergência do método.

Determinamos $M = \max_{x \in [1,3]} |\varphi'(x)| = \max_{x \in [1,3]} |\cos(x)|$ Observando o gráfico de $\cos(x)$ que é decrescente em $[1, 3]$ isso porque $\cos(x)$ é decrescente em $[0, \pi]$ e temos $[1, 3] \subset [0, \pi]$. Ou podemos observar diretamente o gráfico de $|\cos(x)|$ que tem o seu máximo será num dos dois extremos em $[1, 3]$: $|\cos(1)| = |0.5403| = 0.5403$, $|\cos(3)| = |-0.99| = 0.99$.

Portanto $M := \max_{x \in [1, 3]} |\cos(x)| = 0.99$.

Agora sabemos pelo Teorema da estimativa do erro do método do ponto fixo, página 6, Aula 6, que $|x_k - \xi| < \frac{M}{1-M} |x_k - x_{k-1}|$. Portanto para ter $|x_k - \xi| < \varepsilon_1 = 10^{-2}$, ver página 7, Aula 6, temos de satisfazer $|x_k - x_{k-1}| < \frac{1-M}{M} \varepsilon_1 = ((1 - 0.99)/0.99) * 10^{-2} \approx 1.01 \cdot 10^{-4}$.

Usaremos então os criterios de presição

$$\begin{cases} |x_k - x_{k-1}| < 1.01 \cdot 10^{-4} \\ |h(x_k)| < 10^{-3} \end{cases}$$

Com $x_0 = 1.3 \in I$ depois 6 iterações obtemos $x_6 = 1.9346$, que satisfaz $|h(x_6)| = -1.9465e - 05$ e $|x_6 - x_5| = 6.9256e - 06$. Portanto obtemos uma aproximação que satisfaz os criterios requeridos depois 6 iterações com o método do ponto fixo.

c) Para poder aplicar o método de Newton

$$x_{k+1} = x_k - \frac{h(x_k)}{h'(x_k)}$$

temos como no item anterior encontrar o intervalo de contração da função do ponto fixo de Newton que contem a raiz ξ . A função do ponto fixo de Newton é $\varphi_{Newton} = x - \frac{h(x)}{h'(x)}$. A sua derivada é

$$\varphi'(x) = \frac{h''(x)h(x)}{h'(x)^2} = \frac{\sin x(\sin x - x + 1)}{(\cos x - 1)^2}.$$

Resulta ser difícil achar um intervalo I que contem a raiz (que é ≈ 2) e para que Determinamos um $x_0 = k\frac{\pi}{4}$. Se usamos $x_0 = 0$ temos $\varphi'(0) = 0 < 1$ mas $h'(0) = 0$, e portanto não podemos implementar o método de Newton. Se usamos $x_0 = \frac{\pi}{4}$ obtemos $|\varphi'(x_0)| = \left| \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{4} + 1}{(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1)^2} \right| = \left| \frac{0.6517}{0.0858} \right| = 7.5956 > 1$ portanto não podemos começar o método de Newton nem com $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

Se for $x_0 = \frac{\pi}{2}$ temos $|\varphi'(x_0)| = \left| \frac{1(1 - \frac{\pi}{2} + 1)}{1} \right| = 0.4292 < 1$ e $h(\frac{\pi}{2}) = 1 - \frac{\pi}{2} + 1 = 0.4292 \neq 0$ portanto $x_0 = \frac{\pi}{2} \approx 1.5708$ é uma candidata iteração inicial do método de Newton.

Com $x_0 = 1.5708$ depois 4 iterações obtemos $x_4 = 1.9346$, que satisfaz $|h(x_4)| = -2.0539e - 13$ e $|x_4 - x_3| = 6.6301e - 07$. Portanto obtemos uma aproximação que satisfaz os criterios requeridos depois 4 iterações com o método de Newton.