Convergência dos métodos, Método da Secante

MS211 – Cálculo Numérico

Giuseppe Romanazzi

5 Maio 2020

Introdução

Nesta aula vamos apresentar antes o conceito de convergência dos métodos numéricos para resolver equações não lineares, (ou seja usados para resolver o problema dos zeros $f(x) = 0$). Vamos apresentar o método iterativo da Secante e na próxima aula o método de Newton. Diferentemente dos métodos da bisseção e da secante, estes métodos são rápidos e locais. Cada iteração destes novos métodos é automaticamente construída sem alguma construção e determinação de um novo intervalo que contenha o zero.

Conteúdo

Conteúdo

Convergência e erro ao passo k

Como já vimos dada uma sucessão $\{x_k\}$ de um método numérico usado para procurar o zero ξ de uma função f

Definição (Convergência do método)

O método que gera a sucessão $\{x_k\}$ diz se **convergente** *à raiz (ou zero) ξ se vale $\lim_{k\to\infty} x_k = \xi$.*

Então como já vimos o método da bissecção e da falsa posição são convergentes quando f admite um único zero em $[a, b]$.
Seja no que segue $e_k := |x_k - \xi|$ o **erro do método ao passo(iteração)** k observamos que se o método for convergente então a sucessão dos erros converge a zero

$$\lim_{k\to\infty} e_k = 0.$$

Convergência linear

É útil, para comparar a rapidez dos métodos convergentes, determinar a ordem de convergência de cada método.

Definição (Convergência linear)

Se existir $0 < C < 1$ *tal que* $\lim_{k\to\infty} \frac{e_{k+1}}{e_k} = C$ *então o método (que gera* $\{x_k\}$*) é dito* **linear**, *ou de ordem de convergência 1.*

Notamos que se $\{x_k\}$ for gerada de um método linear vale que: por k suficientemente grande ($\exists \nu > 0$ tal que $\forall k > \nu$) $e_{k+1} \approx Ce_k$ e então $e_{k+1} < e_k$.

Convergência de ordem superior

Definição Convergência de ordem p

Um método é dito ser **convergente de ordem** p, *com* $p > 1$, *se existir um* $C > 0$ *tal que*

$$\lim_{k \to \infty} \frac{e_{k+1}}{{e_k}^p} = C$$

A constante C é chamada constante assintótica de convergência. Note que vale que por k suficientemente grande $e_{k+1} \approx C^p e_k$.

Definição (Convergência superlinear)

Se $\lim_{k \to \infty} \frac{e_{k+1}}{e_k} = 0$ *o método diz se que converge mais que linearmente (ou que é superlinear).*

Neste ultimo caso é esperável que a ordem de convergência seja superior de 1.

Convergência dos métodos de Bisseção e Falsa Posição

- Sabemos que o método da bisseção é convergente, porem não se conhece a sua ordem de convergência, porque esta dependerá da função e do intervalo $[a, b]$ utilizado. Sabemos só que para a bisseção vale sempre que $e_k < \frac{b_k - a_k}{2} = \frac{b-a}{2^{k+1}}$, que é útil para estimar o erro cometido no passo k.

- O método da falsa posição em vez pode ser linear nalgum caso comum, como quando a função for convexa ou concava.

Teorema (Convergência linear do método da falsa posição)

Seja f tal que $f(a)f(b) < 0$ com um único zero em $[a, b]$, se f for convexa ou concava em $[a, b]$ (ou seja $f'' > 0$ ou $f'' < 0$ respetivamente) então o método da falsa posição é linear

$$\lim_{k \to \infty} \frac{e_{k+1}}{e_k} = M,$$

com $0 < M < 1$ obtida da formula $M = 1 - \frac{f'(\xi)}{f'(w)}$ com

$$\begin{cases} w \in (\xi, b), \text{se } f \text{ for convexa} \\ w \in (a, \xi), \text{se } f \text{ for concava} \end{cases}$$

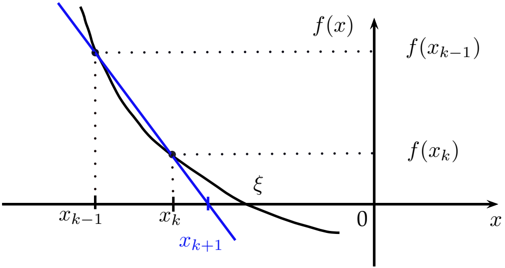
Proposição (Estimativa do erro da falsa posição)

Se a derivada f' for continua em $[a, b]$, $f(a)f(b) < 0$.
Sejam $m_1 = \min_{x \in [a,b]} f'(x)$ e $M_1 = \max_{x \in [a,b]} f'(x)$ então vale a seguinte estimativa do erro ao passo $k+1$:

$$e_{k+1} \leq \frac{M_1 - m_1}{m_1} |x_{k+1} - x_k|$$

Método da Secante

Este método usa duas aproximações anteriores x_{k-1} e x_k do zero de uma função f para poder achar uma aproximação melhor. A aproximação é obtida através a interseção com o eixo das x da linha "secante" que passa pelos pontos $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ e



$(x_k, f(x_k))$ Notamos que este método não usa, diferentemente da bisseção e falsa posição, os extremos do intervalo $[a, b]$ onde é procurado o zero.

Formula do Método da Secante

A iteração $k+1$ do método da secante, ou seja x_{k+1}, é obtida portanto como a solução x do sistema

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{y - f(x_{k-1})}{x - x_{k-1}} = \dfrac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} & \text{(equação reta secante)} \\ \\ y = 0 & \text{(equação do eixo das x)} \end{array}\right. \quad \rightarrow x_{k+1} = x$$

Temos três possíveis expressões de x_{k+1}

$$x_{k+1} = \frac{f(x_k)x_{k-1} - f(x_{k-1})x_k}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \tag{1}$$

$$x_{k+1} = x_{k-1} - f(x_{k-1})\frac{(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \tag{2}$$

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)\frac{(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \tag{3}$$

Observações

- Note como a formula (expressão) (1) do método da secante é similar a aquela da falsa posição
- Onde evitar erros de cancelamento subtrativo que acontecem com esta formula (1) quando $x_k \approx x_{k-1}$ prefere-se usar a formula (2) ou (3).

Algoritmo e critérios de paragem(saída)

Inicialização	x_0, x_1 dados de input
Repetir	1. $x_{k+1} = x_k - f(x_k)\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$; 2. $k = k + 1$;
Até	Verificar o critério de paragem

Dois critérios de paragem do algoritmo são possíveis:

i) $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$

ii) $|f(x_k)| < \varepsilon$

- O critério i) garante a saída do algoritmo quando duas iterações sucessivas são próximas a menos de ε, isso porem não garante que $|x_k - \xi| < \varepsilon$. Mas se for ε muito pequeno e temos garantia da convergência (ver teorema na slide 13), é esperável que, satisfeito o critério i), o último x_k seja próximo do zero.
- O critério ii) pode ser usado junto com o critério i).
  É também possível usar dois ε diferentes, por exemplo
  $|x_k - x_{k-1}| < 10^{-4}$ e $|f(x_k)| < 10^{-2}$

Exemplo

Procurar o zero de $f(x) = x \log x - 1$ em $[2, 3]$. Sabemos já que em $[2, 3]$ tem um único zero, escolho de usar como $x_0 = 2$ e $x_1 = 3$, poderia também ter usado $x_0 = 2$ e $x_1 = 2.5$, porque a escolha é livre, porem no teorema a seguir vamos ver como é importante usar x_0, x_1 perto de zero. Com $x_0 = 2$, $x_1 = 3$, e usando como condição de paragem ($|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon_1$ e $|f(x_k)| < \varepsilon_2$) do algoritmo com $\varepsilon_1 = 10^{-4}$, $\varepsilon_2 = 10^{-6}$, obtemos usando $f(x_0) = -0.39794, f(x_1) = 0.431367$ as seguintes iterações:

$$
\begin{array}{lll}
x_2 = x_1 - f(x_1)\frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} \approx 2.504964 & \text{com } f(x_2) \approx -0.001016 \\
x_3 = x_2 - f(x_2)\frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)} \approx 2.506188 & \text{com } f(x_3) \approx 2.80210^{-6} \\
x_4 = x_3 - f(x_3)\frac{x_3 - x_2}{f(x_3) - f(x_2)} \approx 2.506184 & \text{com } f(x_4) \approx -3.55510^{-10}
\end{array}
$$

x_4 satisfaz ambas as condições de paragem:

$$|x_4 - x_3| \approx 4 \cdot 10^{-6} < 10^{-4} \quad |f(x_4)| < 10^{-6},$$

por isso o algoritmo pare nesta iteração.

Métodos Globais e Locais

- Os **métodos globais** convergem sempre que existir um único zero na região considerada. Os métodos da bisseção e da falsa posição são globais.
- Os **métodos locais** para convergir precisam usar iterações iniciais perto da raiz procurada e somente neste caso os métodos locais têm a garantia de convergir a raiz. Os métodos da secante e de Newton são locais.

Convergência

Teorema (Convergência do método da secante)

Seja f com pelo menos um zero ξ em $[a,b]$, e tal que $f'(x) \neq 0$ por cada $x \in [a,b]$, e tal que admite derivada segunda continua em $[a,b]$. Se os pontos x_0 e x_1 foram tomados bastantes perto do zero ξ então o método da secante é convergente e tem ordem $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} (\approx 1.618)$:

$$\lim_{k\to\infty} e_k = 0 \quad , \quad \lim_{k\to\infty} \frac{e_{k+1}}{e_k^p} = C$$

Propriedades:

- Vale que o erro ao passo $k+1$ satisfaz

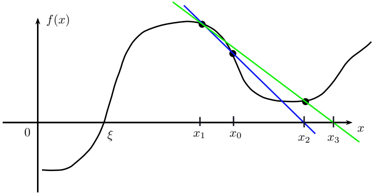
$$e_{k+1} \leq M e_k e_{k-1}$$

  onde $M = \frac{M_2}{2M_1}$ com $M_1 \leq \inf_{x\in[a,b]} |f'(x)|$ e $\sup_{x\in[a,b]} |f''(x)| \leq M_2$.

- x_0 e x_1 **"bastantes perto ao zero"** significa por este método que: $|x_0 - \xi| \leq \frac{1}{M}$ e $|x_1 - \xi| < \frac{1}{M}$

Interpretação geométrica da escolha de x_0, x_1

Mostramos graficamente a importância de tomar x_0 e x_1 perto da raiz ξ. Se x_0, x_1 foram distantes da raiz pode acontecer que $\{x_k\}$ não converge a ξ, e pode até ir ao infinito se não existem mais zeros além de ξ.



Se em vez x_0, x_1 foram perto do zero e tomados na região da curva com a mesma concavidade ou monotonocidade do zero, teremos convergência