Zeros de Funções

MS211 – Cálculo Numérico

Giuseppe Romanazzi

25 Abril 2020

Conteúdo

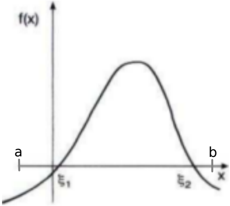
Conteúdo

Introdução

Nesta aula vamos ver o que são os zeros de funções reais, como podemos determinar o numero de zeros e localizar as regiões que os contêm. Nas próximas aulas vamos apresentar vários métodos numéricos que permitem de aproximar os zeros da função dada e as regiões que os localizam.

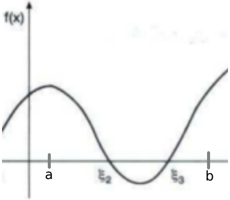
Definição de zero de uma função real

Um valor $\xi \in \mathbb{R}$ é dito zero da função $f(x)$ se vale que $f(\xi) = 0$. Uma função dependendo do domínio analisado pode ter 0, 1, ou mais zeros. Exemplo de três funções:

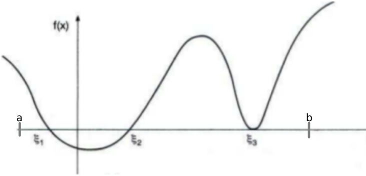


Dois zeros ξ_1,ξ_2 em $[a, b]$.

Não há zeros em $[a, 0]$



Dois zeros em $[a, b]$



Três zeros em $[a, b]$
Dois zeros em $[0, b]$

Problemas de zeros: Encontrar x tal que $f(x) = 0$

Donde sai o problema de achar o zero (ou os zeros) de uma função?

- No resolver equações não lineares:
  $\sin(x) + \cos(x) - e^x = 0$; $\ln x + \sin x = 3$;
  $x^2 + x - \tan x = x \cos(x)$
  Todos estes problemas são do tipo $f(x) = 0$.
  No último caso por exemplo $f(x) = x^2 + x - \tan x - x \cos(x)$.

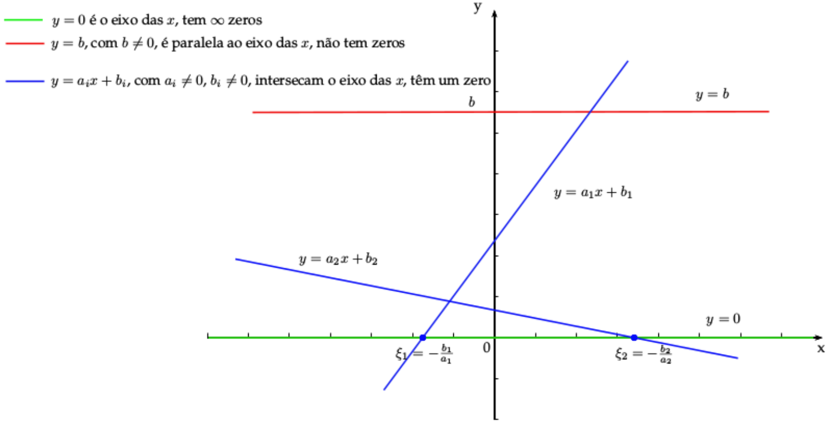
- No problema de achar a interseção de duas curvas (funções):
  $\Psi(x) = \Phi(x)$.
  Neste caso a função f é $\Psi - \Phi$. O problema de zero é de encontrar os x tais que $\Psi(x) - \Phi(x) = 0$.
- No determinar os x tais que uma função chega a um dado nível.
  Exemplos:
  Determinar os x tais que $g(x) = l$ com $\ell \in \mathbb{R}$;
  Resolver $x^2 = 3$; $ln(x) + \sin(x) = 2$; etc.
  Nestes casos as soluções são os zeros de $f(x) = g(x) - \ell$.

Zeros de polinômios de grau 1 (retas)

Retas no plano $y = ax + b$ são descrita de funções lineares (que são os polinômios de primeiro grau) $f(x) = ax + b$. Três casos são possíveis:

- $a = 0, b \neq 0$. A função f é aquela constante $f(x) = b$. Não há zeros, a reta não interseca o eixo das x, porque é paralela ao eixo das x.
- $a \neq 0$. Há um zero $\xi = -\frac{b}{a}$. $f(x) = ax + b$ tem como gráfico uma reta incidente com o eixo das x.
- $a = 0, b = 0$. Tem infinitos zeros, ou seja a função é $f(x) = 0$ (função nula). O gráfico da f coincide com o eixo das x.

Zeros de polinômios de grau 1 (retas)

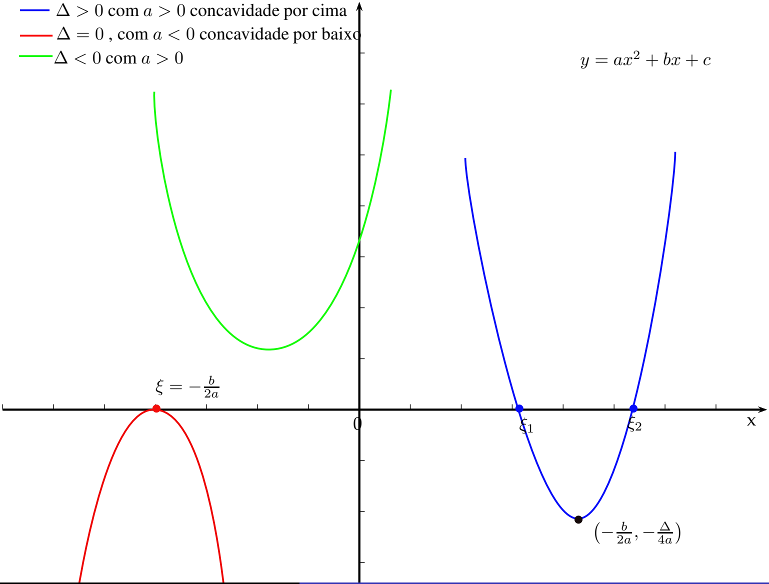


Zeros de polinômios de segundo grau (parábolas)

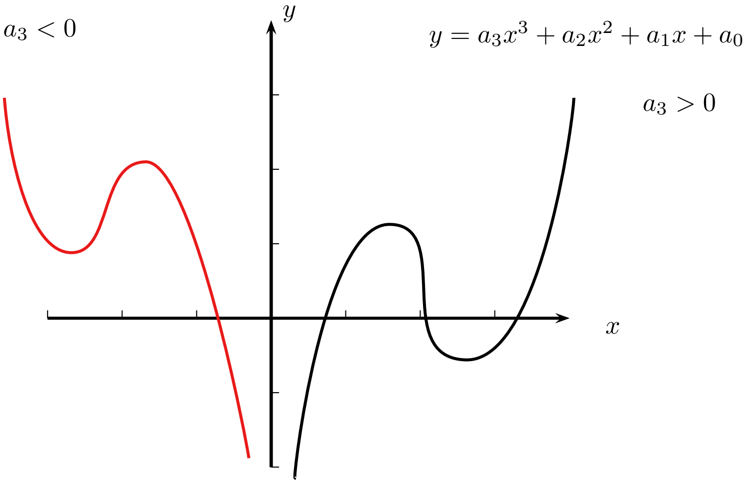
$f(x) = ax^2 + bx + c$ pode ter ao máximo dois zeros porque esta função tem como gráfico a parábola $y = ax^2 + bx + c$ que pode intersecar o eixo das x ao máximo duas vezes.
Os zeros se encontram resolvendo a equação $ax^2 + bx + c = 0$ ou equivalentemente determinando as interseções da parábola com o eixo das x $\begin{cases} y = 0 \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases}$
Três situações são possíveis, que dependem do discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$:

- se $\Delta > 0$ temos dois zeros: $\xi_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, $\xi_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
- se $\Delta = 0$ temos um zeros $\xi = -\frac{b}{2a}$ a abscissa do vértex da parábola
- se $\Delta < 0$ não temos algum zero (real).

Zeros de polinômios de segundo grau (parábolas)



Polinômios de grau superior, $n = 3$

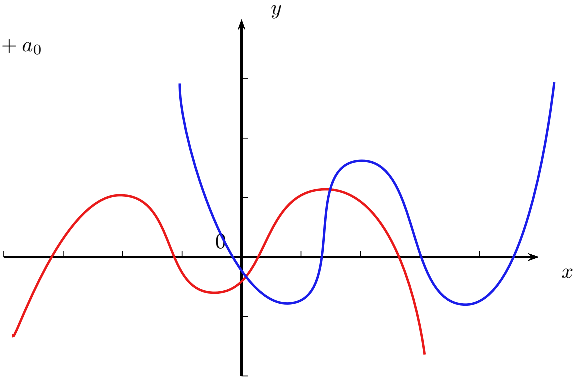


Polinômios de grau superior, $n = 4$

$$y = a_4x^4 + a_3x^3 + \ldots + a_0$$

$a_4 > 0$

$a_4 < 0$



Polinomios de grau n par podem ter de 0 até n zeros reais.
Polinomios de grau n impar podem ter de 1 até n zeros reais.

Zeros de polinômios de grau n

Sabe que um polinômio de grau n, $p_n(x)$, é do tipo $p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0$ e pode ter até n zeros reais, mas tem sempre n zeros complexos $\xi = \xi_{re} + i\xi_{im}$, que pode ser escrito também como $p_n(x) = a_n(x - \xi_1)\cdots(x - \xi_n)$ onde ξ_i são os zeros do polinômio p_n.

- Até agora a matemática (o cálculo) tem ajudado nós bastante para determinar os zeros exatamente.
- Mas encontrar os zeros de polinômios de grau n (com n grande) resulta ser difícil analiticamente, por isso a seguir vamos usar métodos numéricos para aproximar eles.

Procedimento para achar os zeros

O Procedimento divide-se em duas fases

1. Fase 1: Localização ou isolamento das regiões que contêm os zeros
2. Fase 2: Aplicação de um método numérico para refinar tais regiões e achar assim com mais precisão os zeros

O sucesso na Fase 1 da localização de regiões restritas no entorno do zero permite de resolver a Fase 2 mais rapidamente

Teorema 1 (Localização dos zeros)

Seja $f(x)$ uma função continua em $[a, b]$, se $f(a) \cdot f(b) < 0$

- *existe pelo menos um zero $\xi \in [a, b]$ tal que $f(\xi) = 0$.*
- *se também f for estritamente monótona em $[a, b]$ então f tem somente um zero em $[a, b]$*

O que significa o Teorema 1. Interpretação Gráfica

Fig. 1

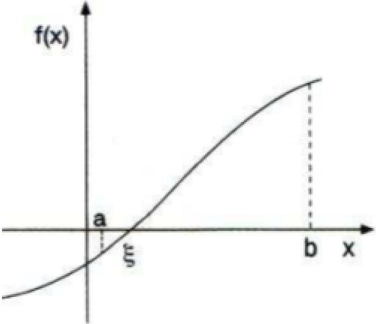
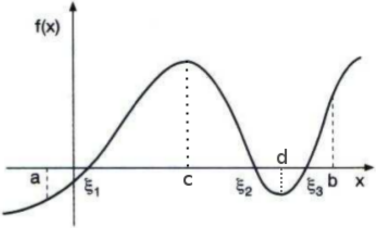


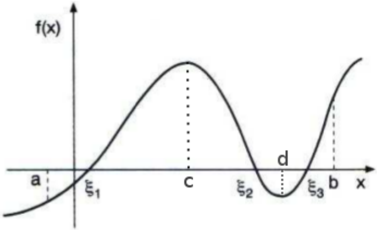
Fig. 2



Em ambos os casos entre a e b tem pelo menos um zero porque $f(a)$ e $f(b)$ tem sinais opostos. Na figura 1, tem exatamente um zero ξ porque f é crescente (monótona crescente). Na figura 2 tem três zeros ξ_1, ξ_2, ξ_3, porque a função muda a monotonocidade três vezes.

É possível ter um número par de zeros?

O que significa o Teorema 1. Interpretação Gráfica



- Somente conhecendo o sinal de $f(a), f(b), f(c), f(d)$ e a monotonocidade da função (ou seja onde ela é crescente ou decrescente) é possível determinar regiões mais limitadas que contêm os três zeros.
- Em $[a, c]$ é esperado só um zero porque a função é crescente e $f(a) \cdot f(c) < 0$. As regiões que contêm os outros zeros são $[c, d]$ e $[d, b]$ porque em estes intervalos f é monótona (decrescente em $[c, d]$ e crescente em $[d, b]$) e os extremos dos intervalos tem sinal oposto.

Aplicação do Teorema 1: Determinar regiões que contêm os zeros

Considere $f(x) = \sqrt{x} - 5e^{-x}$ no intervalo $[0, 3]$.

- $f(0) = -5 < 0$ e $f(3) = \ 1.4092 > 0$ existe pelomenos um zero em $[0, 3]$.
- Analisando a derivada podemos verificar se existem mais zeros: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 5e^{-x} > 0$ (função estritamente crescente) em todo $\mathbb{R}$, portanto existe um único zero em $[0, 3]$.
- Estudando o sinal da f computada em pontos, random ou bem escolhido (ver método da Bisseção) em $[1, 3]$ podemos localizar melhor o zero.

x	0	1	2	3
f(x)	-5	-0.8394	0.7375	1.4831

O zero está no intervalo $[1, 2]$ que é mais restrito do que $[0, 3]$. Se queremos ser mais precisos analizando f nos pontos $1.d$ com $1 \leq d \leq 9$ observamos que $f(1.4) < 0$ e $f(1.5) > 0$. Portanto o zero está em $[1.4, 1.5]$. Uma análise mais cuidadosa usando por exemplo o método das bisseções leva a ter $\xi \approx 1.4304$.

Aplicação do Teorema 1: Determinar regiões que contêm os zeros

Seja $f(x) = x^3 - 9x + 3$, analizando o sinal da f em $-5, -1, 0, 1, 2, 3$ temos

x	-5	-1	0	1	2	3
f(x)	-	+	+	-	-	+

Portanto temos pelo menos três intervalos onde varia o sinal $[-5, -1]$, $[0, 1]$, $[2, 3]$: temos pelo menos três zeros! Sendo que f é um polinômio de grau 3 temos exatamente três zeros (reais), cada um num intervalo:

$$\xi_1 \in [-5, -1], \xi_2 \in [0, 1], \xi_3 \in [2, 3]$$

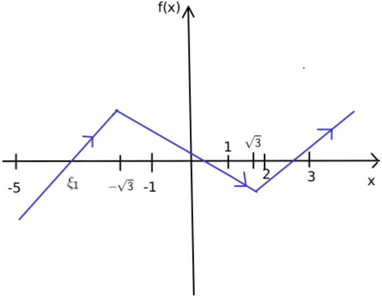
Podemos refinar os intervalos sem avaliar a f em outros pontos? ...

Aplicação do Teorema 1: Determinar regiões mais limitadas usando a derivada

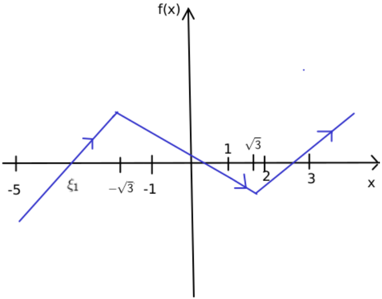
...As vezes podemos: Vamos determinar as regiões onde muda o sinal da derivada assim conheceremos onde f é crescente ($f' > 0$) e onde é decrescente ($f' < 0$).

$$f'(x) = 3x^2 - 9 > 0 \iff x^2 > 3 \iff x < -\sqrt{3} \text{ ou } x > \sqrt{3}$$

Sendo que $\sqrt{3} \approx 1.732$, em $[-5, -\sqrt{3}]$, $[\sqrt{3}, 3]$ a função é crescente e é decrescente em $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$.



Aplicação do Teorema 1: Determinar regiões mais limitadas usando a derivada



Sabemos que sendo que f é crescente em $[-5, -\sqrt{3}]$ e decrescente em $[-\sqrt{3}, -1]$, o máximo em $[-5, -1]$ é em $-\sqrt{3}$ e portanto temos $f(-\sqrt{3}) > 0$ e para o Teorema 1 o zero ξ_1 estará em $[-5, -\sqrt{3}]$. O mínimo de f em $[0, 3]$ é em $\sqrt{3}$ portanto $f(\sqrt{3}) < 0$, mas sendo que $1 < \sqrt{3} < 2$ este não ajuda a refinar o intervalo $[0, 1]$ e nem $[2, 3]$.

Funções não continuas

O Teorema 1 não vale para funções continuas. Porque se $f(a) \cdot f(b) < 0$ com f descontinua não temos garantia que existe um zero em $[a, b]$.