Aproximação Polinomial de Taylor

MS211 – Cálculo Numérico

Giuseppe Romanazzi

2 Abril 2020

Dada uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável infinitas vezes (f regular), ela satisfaz a seguinte relação (expansão) por cada x, x_0

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!} + \ldots + f^{(k)}(x)\frac{(x-x_0)^k}{k!} + \ldots$$

O que significa?

Cada função regular pode ser vista como um polinômio de grau infinito!

Exemplos com $x_0 = 0$:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

$$sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$$

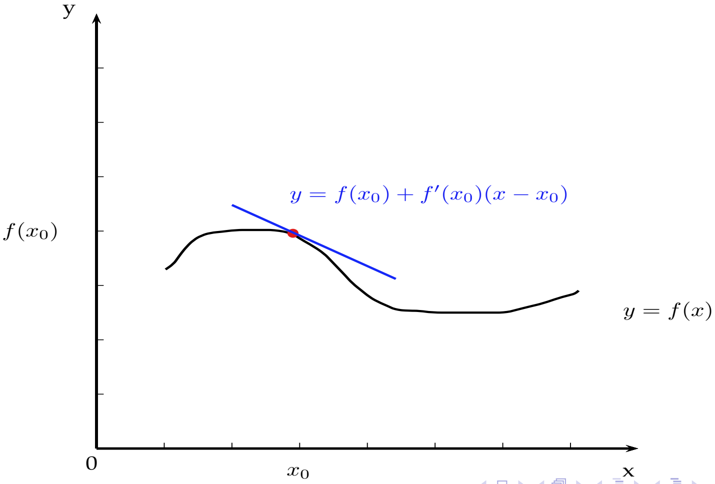
$$cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + f^{(k)}(x)\frac{(x-x_0)^k}{k!} + f^{(k+1)}(\xi)\frac{(x-x_0)^{k+1}}{(k+1)!}$$

- O último termo $f^{(k+1)}(\xi)\frac{(x-x_0)^{k+1}}{(k+1)!}$ é chamada resto da expansão em serie de Taylor com centro x_0 truncada ao ordem k.
- O valor ξ é um ponto que fica no intervalo $[\min x, x_0, \max x, x_0]$
- Portanto dada uma função regular f podemos saber qual é o erro da aproximação com o polinômio $p_k(y) := f(x_0) + f'(x_0)(y - x_0) + \ldots + f^{(k)}(y)\frac{(y-x_0)^k}{k!}$:
  Erro da aproximação polinomial (em valor absoluto) no ponto x é $|f(x) - p_k(x)| = \left| f^{(k+1)}(\xi)\frac{(x-x_0)^{k+1}}{(k+1)!} \right|$, onde $\xi \in [\min x, x_0, \max x, x_0]$

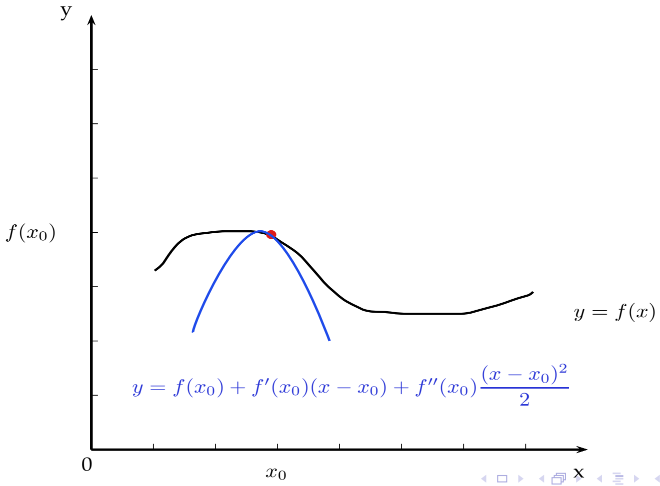
Exemplos Gráficos, aproximação polinomial de ordem 1 (usa a reta)

Aproximação da função f num entorno do ponto x_0 com a reta
$p_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$



Exemplos Gráficos, aproximação polinomial de ordem 2 (usa a parábola)

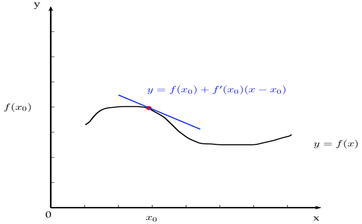
Aproximação da função f num entorno do ponto x_0 com a parábola $p_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!}$



Erros $f(x) - p_k(x)$ na aproximação polinomial de ordem k

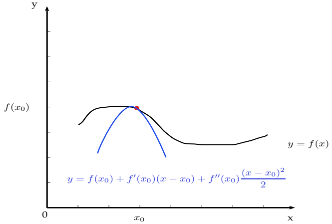
Com polinômio de ordem 1,

Erro em $x \neq x_0$ é $f''(\xi)\frac{(x-x_0)^2}{2!}$



Com polinômio de ordem 2,

Erro em $x \neq x_0$ é $f'''(\xi)\frac{(x-x_0)^3}{3!}$



- O erro em x aumenta quanto mais x dista de x_0
- Incrementando a ordem do polinômio de Taylor o erro é menor. (Assumindo que as $f^{(k)}(\xi)$ são igualmente limitadas)
- Porém computar o valor de polinômios de alta ordem tem custo computacional alto
- Temos um balanço entre acurácia e custo computacional, isso acontece em todos os métodos numéricos: mais acurácia necessita um maior custo computacional do método.