

Sistemas de equações não lineares e Métodos numéricos

MS211 – Cálculo Numérico

Giuseppe Romanazzi

18 Junho 2020

Introdução

Nesta aula apresentaremos os sistemas de equações não lineares e donde eles surgem. Vamos descrever como se pode achar uma aproximação da solução destes sistemas.

Descreveremos uma versão do método de Newton que estende o método de Newton visto na aula 13, onde foi utilizado para achar somente a solução de uma única equação não linear.

Estudaremos a convergência, o algoritmo e uma implementação numérica desta nova versão do método de Newton para resolver um sistema não linear dado.

Conteúdo

- 1 Sistemas de equações não lineares
 - Exemplos
 - Matriz Jacobiana, normas e controle dos métodos iterativos

- 2 Método de Newton
 - Convergência
 - Exemplo

Sistemas de equações não lineares

Estes sistemas de equações são muito comuns nos problemas reais, eles aparecem cada vez que as variáveis procuradas não dependem linearmente entre eles.

Por exemplo, eles podem surgir quando precisarmos de encontrar dois ou mais valores x, y, z, \dots que descrevem quantidades nos

- fenômenos naturais (como a temperatura, pressão, massa, velocidade, tempo, distancia)
- problemas geométricos (coordenadas, inclinações, ângulos)
- problemas industriais (peso, resistência de materiais, temperatura, pontos de ruptura, pontos críticos, tensão elétrica, percentagens, tempos, etc).

Sistemas de equações não lineares

Se as variáveis x, y, z, \dots não fossem ligadas entre eles através equações lineares (ou seja através equações onde aparecem somente a soma e multiplicação por constante, tipo $a_i x + b_i y + c_i z = d, i = 1, 2, \dots$) então estaremos necessariamente no caso onde é preciso resolver varias equações não lineares ao mesmo tempo.

Cada conjunto de equações lineares que foram satisfeitas ao mesmo tempo de algumas incógnitas x, y, z, \dots ou x_1, x_2, x_3, \dots chama se sistema de equações não lineares, ou simplesmente sistema não linear.

O sistema linear $Ax = b$ não é claramente não linear. Mas se uma só das suas equações fosse não linear então classificaremos o sistema completo como não linear.

Note que equações tipo $ax_1 * x_2 + bx_3 = c$ é uma equação não linear assim como $x_1^2 + x_2 - 3 = x_3$

$$\cos(x_1) + x_2 = -2,$$

$$\log(x_2) + x_3 = 1,$$

$$e^{x_3} - x_1 = 4x_2, \dots$$

Sistemas não lineares, $F(x) = 0$

Suponha de ter n incógnitas que indicamos com x_1, x_2, \dots, x_n e de ter n equações não lineares entre as variáveis, estaremos no caso de ter o seguinte sistema não linear para resolver:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

A função f_i descreve a equação não linear i .

Por exemplo se for $n = 2$ e $f_1(x_1, x_2) = x_1x_2 + x_1 + 1$,

$f_2(x_1, x_2) = x_1^2 - 2$ é como se quiséssemos encontrar x_1, x_2 tais que

$$\begin{cases} x_1x_2 - x_1 + 1 = 0 \\ x_1^2 - 2 = 0 \end{cases} \quad \text{que tem duas soluções}$$

$$(x_1, x_2) = (\sqrt{2}, 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}) \text{ e } (-\sqrt{2}, 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}).$$

Sistemas não lineares, $F(x) = 0$

Note que o sistema

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \iff F(x) = 0$$

pode ser escrito simplesmente como $F(x) = 0$, onde $x \in \mathbb{R}^n$ é um vetor de dimensão n que tem como elementos os x_i incógnitos: $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$. A função F transforma os vetores em \mathbb{R}^n em outros vetores em \mathbb{R}^n , ou seja $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, satisfaz

$$F(x) = F(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), f_2(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))^t$$

Exemplos de sistemas não lineares, interpretação geométrica

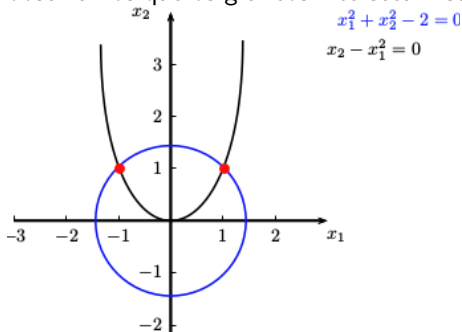
Diferentemente dos sistemas lineares, não é conhecido um critério para determinar a-priori se um sistema não linear de n equações $f_i(x) = 0$ admite zero, uma ou mais soluções. Por exemplo um sistema de duas equações não lineares e de duas incógnitas x_1, x_2 pode ter zero, uma, duas, três, ..., k soluções ou até infinitas soluções.

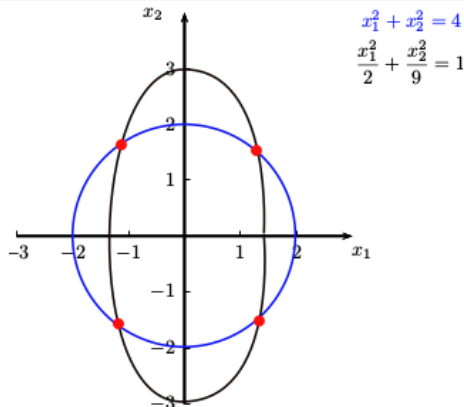
Só é possível achar quantas soluções o sistema tem, fazendo o gráfico dos pontos (x_1, x_2) que satisfazem as equações $f_i(x_1, x_2) = 0$ com $i = 1, 2$ e ver quantas interseções existem.

Exemplos de sistemas com $n = 2$ equações não lineares

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = x_2 - x_1^2 = 0 \end{cases} \quad \text{Notamos que a primeira equação}$$

descreve o conjunto de pontos que distam $\sqrt{2}$ da origem $(0,0)$. Ou seja o gráfico de $f_1(x_1, x_2) = 0$ descreve a circunferência de centro $(0,0)$ e raio $\sqrt{2}$. Em vez a segunda equação descreve os pontos que se encontram na parábola de equação $x_2 = x_1^2$ que tem vértex na origem. Dos gráficos entendemos que tem duas soluções do sistema, porque observamos que os gráficos intersecam-se em dois pontos.



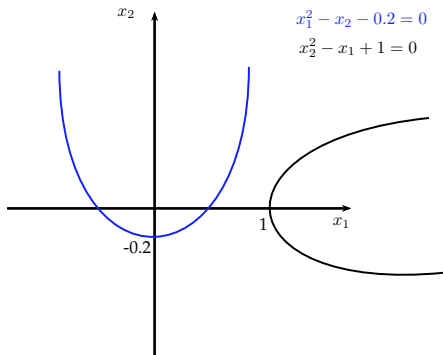
Exemplos de sistemas com $n = 2$ equações não lineares

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 4 \\ \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{9} = 1 \end{cases}$$

Este sistema tem 4 soluções. Note que as soluções são as interseções da circunferência de raio 2 e centro na origem e de um elipse de equação $\frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{9} = 1$ que então tem semi eixos de medida $\sqrt{2}$ ao longo do eixo x_1 e de medida 3 ao longo do eixo x_2 . A elipse é centrada na origem.

$$\begin{cases} x_1^2 - x_2 = 0.2 \\ x_2^2 - x_1 + 1 = 0 \end{cases}$$

A primeira equação pode ser escrita como $x_2 = x_1^2 - 0.2$ portanto descreve os pontos ao longo de uma parábola com vértex em $(0, -0.2)$ com concavidade por cima. A segunda equação pode ser escrita como $x_1 = x_2^2 + 1$ e portanto é uma parábola com concavidade a direita no plano $x_1 \hat{x}_2$ e vértex em $(1, 0)$. Portanto não existem interseções, veja o gráfico. O sistema não tem então soluções.



Matriz Jacobiana de F

Seja $F : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ a função que descreve o sistema não linear e $x \in D$ um ponto no domínio da F .

Definição Matriz Jacobiana

Chama-se matriz jacobiana de F no ponto x ou simplesmente Jacobiana de F em x a seguinte matriz de dimensão n

$$J_F(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f_1^t(x) \\ \nabla f_2^t(x) \\ \vdots \\ \nabla f_n^t(x) \end{pmatrix}$$

Denotado com $\nabla f_i(x) \in \mathbb{R}^n$ o gradiente de f em x ou seja,
 $\nabla f_i(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}(x) \quad \frac{\partial f_i}{\partial x_2}(x) \quad \cdots \quad \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(x) \right)^t$. Temos também

$$J_F(x) = \left(\nabla f_1(x)^t \quad \nabla f_2(x)^t \quad \cdots \quad \nabla f_n(x)^t \right)^t.$$

O Jacobiano estende o conceito de derivada para funções n -dimensionais

Exemplo de Jacobiano associado a um sistema não linear

$$\begin{cases} -2x_1^3 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 4x_1 - 2x_2 = -1 \\ -x_3 + x_1 = 0 \end{cases}$$

Observamos que o sistema pode ser escrito assim

$$\begin{cases} f_1(x) = -2x_1^3 + 2x_2 + x_3 - 2 = 0 \\ f_2(x) = 4x_1 - 2x_2 + 1 = 0 \\ f_3(x) = x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Portanto o Jacobiano de $F = (f_1 \quad f_2 \quad f_3)^t$ num ponto $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ é

$$J_F(x) = \begin{pmatrix} -6x_1^2 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Normas de Matrizes e vetores

A **norma de matriz** induzida de uma norma vetorial é

$$\|A\| := \sup_{x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Exemplo de normas de matrizes: sendo que $\|x\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$, obtemos

$$\|A\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \max_{i=1, \dots, n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

Usando que $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$, obtemos

$$\|A\|_1 = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} = \max_{j=1, \dots, n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|.$$

Temos que $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ é a norma euclideana e a norma associada é $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(AA^t)}$ que é a raiz quadrada do máximo autovalor em modulo de AA^t .

Métodos iterativos. Controles de sucesso

Queremos construir métodos iterativos que dada uma aproximação inicial do sistema $F(x) = 0$ geram uma sequência $\{x^{(k)}\}$ que converge a solução x do sistema, ou seja tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x$.

Lembre que este significa que por um dado $\epsilon > 0$ existe um $k_0 > 0$ tal que por cada $k > k_0$ $\|x^{(k)} - x\| < \epsilon$.

Sendo que não se conhece a x solução usaremos três possíveis critérios para parar o processo iterativo com sucesso:

- $\|F(x^{(k)})\| < \epsilon$ (controle do resíduo)
- $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| < \epsilon$ (controle sobre a distância entre duas iterações consecutivas)
- $\frac{\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|}{\|x^{(k+1)}\|} < \epsilon$ (controle sobre a distância relativa)

Usaremos nesta aula a norma do máximo: $\|x\|_{\infty} = \max_i |x_i|$

Controles de insucesso

Há dois possíveis controles para parar o processo iterativo para um insucesso

- $k > k_{max}$
- $\|F(x^{(k)})\| > F_{max}$

onde k_{max} é o número máximo de passos aceites e F_{max} é o máximo valor de F aceite. Estes são controles feitos para evitar que o ciclo iterativo continue ao infinito no caso que não haja convergência.

Método de Newton

Generalizamos o método de Newton $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$, usado para resolver uma só equação não linear, para resolver agora um sistema de n equações não lineares.

Consideramos a aproximação $x^{(k)}$ da solução do sistema não linear $F(x) = 0$, o método de Newton acha a próxima solução através a formula

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - (J_F(x^{(k)}))^{-1}F(x^{(k)})$$

Interpretação geométrica

Lembramos que o método de Newton no caso escalar de uma equação procurava o zero de f determinando em cada passo k o zero da reta tangente a f no ponto $(x_k, f(x_k))$, então:

x_{k+1} era o zero da reta $r(x) = f(x) + f'(x_k)(x - x_k)$. Esta reta $r(x)$ pode ser vista como a linearização de $f(x)$ ao longo do ponto $(x_k, f(x_k))$.

No caso vetorial **o zero da função linear**

$L(x) = F(x) + J_F(x^{(k)})(x - x^{(k)})$, que é a linearização de F passante por $(x^{(k)}, F(x^{(k)}))$, **é o vetor y tal que $L(y) = 0$.**

$$\begin{aligned}L(y) = 0 &\iff J_F(x^{(k)})(y - x^{(k)}) = -F(x^{(k)}) \\ &\iff y = x^{(k)} - J_F(x^{(k)})^{-1}F(x^{(k)})\end{aligned}$$

Por isso $x^{(k+1)} = x^{(k)} - J_F(x^{(k)})^{-1}F(x^{(k)})$ é o zero de $L(x)$.

Determinar $x^{(k+1)}$

Em vez de determinar a inversa de $J_F(x^{(k)})$ podemos obter $x^{(k+1)}$ observando que

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - (J_F(x^{(k)}))^{-1} F(x^{(k)}) \iff J_F(x^{(k)})(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = -F(x^{(k)}).$$

Então obtemos $x^{(k+1)}$ em dois passos

- 1 Resolvemos o sistema $J_F(x^{(k)})s^{(k)} = -F(x^{(k)})$
- 2 Sendo que $s^{(k)} = x^{(k+1)} - x^{(k)}$, obtemos $x^{(k+1)}$ somando o vetor $s^{(k)}$ com a iteração anterior $x^{(k)}$, ou seja $x^{(k+1)} = x^{(k)} + s^{(k)}$.

O sistema linear $J_F(x^{(k)})s^{(k)} = -F(x^{(k)})$ pode ser resolvido usando métodos diretos ou iterativos. Claramente se for usado um método iterativo iremos achar uma aproximação de $s^{(k)}$ e não o valor exato.

Algoritmo

Input: $F, x^{(0)}, \varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$

Passo 1: Computa o vetor $F(x^{(k)})$ e matriz Jacobiana $J_F(x^{(k)})$

Passo 2: Se $\|F(x^{(k)})\|_\infty < \varepsilon_1$ então dá em output $x^{(k)}$. Sai do ciclo iterativo.

Passo 3: Senão resolve o sistema linear $J_F(x^{(k)})s^{(k)} = -F(x^{(k)})$, determinando $s^{(k)}$

Passo 4: $x^{(k+1)} = x^{(k)} + s^{(k)}$

Passo 5: Se $\|s^{(k)}\| < \varepsilon_2$ então dá em output $x^{(k+1)}$; Sai do ciclo.

Passo 6: $k \leftarrow k + 1$, vai ao passo 1

Note que $s^{(k)} = x^{(k+1)} - x^{(k)}$

Teorema de Convergência do método de Newton

Seja $F : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ a função que descreve o sistema não linear $F(x) = 0$ e seja $\Omega_0 \subset D$ tal que

- Ω_0 contem um único zero x de F , ou seja contem uma única solução do sistema.
- F é diferenciável em Ω_0 , ou seja existem todas as derivadas de F e são contínuas em Ω .
- $\det(J_F(x)) \neq 0$, ou analogamente existe $\beta > 0$ tal que $\|J_F(x)^{-1}\| < \beta$ onde x é o zero procurado
- A matriz jacobiana $J_F(y)$ satisfaz a condição de Lipschitz em Ω_0 : existe $\gamma > 0$ tal que por cada $y, z \in \Omega_0$ temos $\|J_F(y) - J_F(z)\| \leq \gamma \|y - z\|$

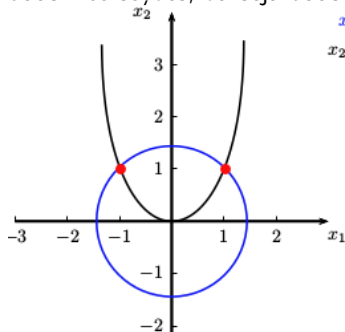
então se $x^{(0)} \in \Omega_0$ temos que cada $x^{(k)}$ estará em Ω_0 e temos a convergência do método de Newton ao zero x procurado: $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x$.

Mais, temos que a convergência é quadrática e vale que existe $C > 0$ tal que: $\|x^{(k+1)} - x\| \leq C \|x^{(k)} - x\|^2$.

Exemplo de resolução numérica de um sistema não linear com o método de Newton

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0 \\ x_2 - x_1^2 = 0 \end{cases}$$

Trata-se de encontrar as interseções de uma circunferência de centro na origem e raio $\sqrt{2}$ e uma parábola com vértice na origem. São esperadas duas interseções, ou seja duas soluções do sistema



$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 - 2 &= 0 \\ x_2 - x_1^2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0 \\ x_2 - x_1^2 = 0 \end{cases}$$

Note que $F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 2 \\ x_2 - x_1^2 \end{pmatrix}$.

Procuramos a solução do sistema que satisfaz um dos dois critérios de aproximação $\|F(x^{(k)})\| < \varepsilon_1$ ou $\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| < \varepsilon_2$, com $\varepsilon_1 = 10^{-1}$, $\varepsilon_2 = 10^{-1}$. Então pararemos o método quando um dos dois critérios for satisfeito.

Decidimos de encontrar o zero de $F(x)$ com $x_1 > 0$.

A matriz jacobiana associada ao sistema é $J_F(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ -2x_1 & 1 \end{pmatrix}$.

Notamos que o seu determinante é $2x_1 + 4x_1x_2 = 2x_1(1 + 2x_2)$ que resulta ser nulo somente se $x_1 = 0$ ou se $x_2 = -\frac{1}{2}$.

Então a região Ω_0 onde pegar o $x^{(0)}$ tem de estar distante do eixo das x_2 (de eq. $x_1 = 0$) e da reta $x_2 = -\frac{1}{2}$. Observando que o zero procurado tem um $x_2 > 0$ e um $x_1 > 0$,

então podemos escolher um $\Omega_0 :=]\delta, +\infty[\times]0, +\infty[$, com $\delta > 0$ ou seja Ω_0 é conteúdo primeiro quadrante.

Analisamos se a condição de Lipschitz: existe $\gamma > 0$ tal que $\|J_F(y) - J_F(z)\| \leq \gamma \|y - z\| \quad \forall y, z \in \Omega_0$ é satisfeita em Ω_0 .
Senão temos de refinar Ω_0 .

Usando a norma do máximo

$$\|J_F(y) - J_F(z)\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} 2(y_1 - z_1) & 2(y_2 - z_2) \\ -2(y_1 - z_1) & 0 \end{pmatrix} \right\|_\infty =$$

$$= \max \{ |2(y_1 - z_1)| + |2(y_2 - z_2)|, |2(y_1 - z_1)| \} = 2|y_1 - z_1| + 2|y_2 - z_2|.$$

Agora sendo que $\|y - z\|_\infty = \max_{i=1,2} |y_i - z_i|$ e

$$\|J_F(y) - J_F(z)\|_\infty = 2|y_1 - z_1| + 2|y_2 - z_2| \leq 2 \max_{i=1,2} |y_i - z_i| + 2 \max_{i=1,2} |y_i - z_i| \leq 4 \|y - z\|_\infty,$$

então vale a condição de Lipschitz em todo \mathbb{R}^2 com $\gamma = 4$. Então sendo também que F é diferenciável e o zero procurado está em Ω_0 podemos pegar um qualquer $x^{(0)}$ com $x_1^{(0)} > 0$ e $x_2^{(0)} > 0$ para ter a convergência do método de Newton ao zero (com $x_1 > 0$) de F .

Escolhemos a aproximação inicial $x^{(0)} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Observamos que com $x^{(0)} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, obtemos

$$F(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}^2 + 0 - 2 \\ 0 - \sqrt{2}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ e portanto}$$

$$\|F(x^{(0)})\|_{\infty} = 2 > \epsilon_1.$$

Determinamos então $x^{(1)}$. Resolvendo: o sistema $J_F(x^{(0)})s = -F(x^{(0)})$ e depois obtemos $x^{(1)}$ como $x^{(1)} = x^{(0)} + s$. O sistema $J_F(x^{(0)})s = -F(x^{(0)})$ é

$$\begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 0 \\ -2\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

A solução do sistema é $s_1 = 0$, $s_2 = 2$ Portanto

$$x^{(1)} = x^{(0)} + s = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Observamos que $\|x^{(1)} - x^{(0)}\|_{\infty} = \|s\|_{\infty} = 2 > \epsilon_2$ e

$$\|F(x^{(1)})\|_{\infty} = \left\| \begin{pmatrix} \sqrt{2}^2 + 2^2 - 2 \\ 2 - \sqrt{2}^2 \end{pmatrix} \right\|_{\infty} = \left\| \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_{\infty} = 4 > \epsilon_1.$$

Precisamos então computar $x^{(2)} = x^{(1)} + s$ onde $s = (s_1 \ s_2)^t$ é o vetor solução do sistema $J_F(x^{(1)})s = -F(x^{(1)})$ que é

$$\begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 4 \\ -2\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A solução é $s = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{5} \\ -0.8 \end{pmatrix}$ e portanto

$$x^{(2)} = x^{(1)} + s = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{5} \\ -0.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{24}}{5} \approx 1.1314 \\ 1.2 \end{pmatrix}.$$

Observamos que

$$\|x^{(2)} - x^{(1)}\|_{\infty} = \max\{|s_1|, |s_2|\} = \max\{0.2828, 0.8\} = 0.8 > \varepsilon_2 \text{ e}$$

$$\|F(x^{(2)})\| = \left\| \begin{pmatrix} 0.72 \\ -0.080 \end{pmatrix} \right\|_{\infty} = 0.72 > \varepsilon_1.$$

Prosseguindo obteremos $x^{(3)} = \begin{pmatrix} 1.0128 \\ 1.0118 \end{pmatrix}$, que tem

$$F(x^{(3)}) = \begin{pmatrix} 0.0495 \\ -0.0141 \end{pmatrix}, \text{ então } \|F(x^{(3)})\|_{\infty} = 0.0495 < \varepsilon_1. \text{ Portanto}$$

$x^{(3)}$ é a solução achada do método de Newton associada ao $\varepsilon_1 = 0.1$.