

Método iterativos para a resolução de sistemas lineares. Método de Jacobi

MS211 – Cálculo Numérico

Giuseppe Romanazzi

9 Junho 2020

Introdução

Nesta aula apresentaremos os métodos iterativos para a resolução de sistemas lineares $Ax = b$.

Estes métodos são similares aos métodos do ponto fixo $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ para achar os zeros de uma função f discutidos nas aulas anteriores. Na verdade os métodos de pontos fixo podem ser chamados também métodos iterativos de um passo porque tem uma iteração definida somente do x_k anterior. Agora, na resolução de $Ax = b$ é como se quiséssemos encontrar a solução do problema do zero $f(x) = Ax - b = 0$.

Os métodos iterativos para a resolução de sistemas lineares são métodos globais, ou seja se o método converge ele convergirá por cada $x_0 \in \mathbb{R}^n$ inicial escolhido. A convergência ou menos destes métodos dependerá somente da matriz A , não dependendo do vetor b .

Na segunda parte da aula vamos apresentar um particular método iterativo chamado método de Jacobi, ou de Gauss-Jacobi. A convergência e implementação manual do método de Jacobi será analisada.

Conteúdo

- 1 Métodos iterativos para a resolução de sistemas lineares
- 2 Normas de matrizes
- 3 Método iterativo de Jacobi
 - Convergência do método de Jacobi

Métodos iterativos

A ideia na construção de métodos iterativos para a resolução do sistema linear $Ax = b$ de dimensão n é de gerar uma sucessão de vetores $\{x^{(k)}\}$ com $x^{(k)} \in \mathbb{R}^n$, que converge a solução do sistema e que é definida a partir de uma função $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que:

- transforma um vetor $x^{(k)}$ de n elementos num vetor $x^{(k+1)}$ de n elementos: $x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)})$.
- a solução $x \in \mathbb{R}^n$ do sistema $Ax = b$ é tal que $\varphi(x) = x$, ou seja é ponto (ou melhor vetor) vetor fixo de φ

Métodos iterativos $x^{(k+1)} = Gx^{(k)} + c$

Os métodos iterativos que trataremos usam como função de iteração $\varphi(y) = Gy + c$ onde $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é chamada matriz de iteração, e $c \in \mathbb{R}^n$ é um vetor. G e c são fixos em cada iteração.

Portanto dada o vetor inicial $x^{(0)}$ teremos

$$x^{(1)} = Gx^{(0)} + c$$

$$x^{(2)} = Gx^{(1)} + c$$

...

$$x^{(k+1)} = Gx^{(k)} + c$$

Convergência, um resumo

Na aula dos métodos do ponto fixo vimos que se um método $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ cria uma sucessão convergente então ela convergirá necessariamente ao ponto fixo de φ . Os métodos iterativos satisfazem a mesma propriedade:

se existir o $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = \bar{y}$ então \bar{y} é ponto fixo de $\varphi(y) = Gy + c$ ou seja $\varphi(\bar{y}) = \bar{y}$ ou equivalentemente $G\bar{y} + c = \bar{y}$.

Portanto vale a seguinte definição

Definição

Um método iterativo para a resolução de $Ax = b$ (com solução x) é convergente se $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x$ ou equivalentemente seja $e^{(k)}$ o vetor erro da iterada k , $e^{(k)} = x - x^{(k)}$, então temos $\lim_{k \rightarrow \infty} e^{(k)} = 0$

Escolha do método iterativo

Fica claro que um bom método iterativo para ser usado tem de ser

- 1 convergente
- 2 tem de ter como ponto fixo a solução x do sistema linear, portanto temos sempre escolher G e c tais que:

$$Gx + c = x \iff Ax = b$$

Critério de paragem (saída) do ciclo iterativo

Há três possíveis critérios de paragem das iterações destes métodos:

- ter distancia de duas iteradas consecutivas
 $d^{(k)} = x^{(k)} - x^{(k-1)}$ pequena, $\|d^{(k)}\| = \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| < \epsilon$,
onde **como norma usaremos a norma do máximo**
 $\|d^{(k)}\| := \max_{i=1,2,\dots,n} |d_i^{(k)}|$ onde $d_i^{(k)}$ é a componente i do
vetor $d^{(k)}$.
- ter distância relativa entre duas iteradas pequena :
 $\frac{\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|}{\|x^{(k)}\|} < \epsilon$ ou $\frac{\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|}{\|x^{(k+1)}\|} < \epsilon$
- ter resíduo da iteração k pequeno. Ou seja o vetor resíduo
 $r^{(k)} := b - Ax^{(k)}$ tem de satisfazer $\|r^{(k)}\| < \epsilon$
- É possível usar combinações destes critérios por exemplo
 $\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| < \epsilon_1$ e (ou) $\|b - Ax^{(k)}\| < \epsilon_2$

Formas equivalentes de um método iterativo

A duas formas equivalentes principais na escrita do método iterativo para resolver $Ax = b$ com A não singular:

- $x^{(k+1)} = Gx^{(k)} + c$ (forma clássica)
- $x^{(k+1)} = x^{(k)} + (I - G)A^{-1}r^{(k)}$ (forma com o resíduo),
onde $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$

Deduzimos a segunda forma da primeira:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - x^{(k)} + Gx^{(k)} + c = x^{(k)} + (G - I)x^{(k)} + c = x^{(k)} - (I - G)x^{(k)} + c. \quad (1)$$

Agora sabendo que a solução x do sistema satisfaz $x = A^{-1}b$ e $x = Gx + c$ temos que $c = (I - G)x = (I - G)A^{-1}b$, substituindo esta expressão de c na equação (1), temos

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - (I - G)x^{(k)} + (I - G)A^{-1}b = x^{(k)} - (I - G)A^{-1}Ax^{(k)} + (I - G)A^{-1}b = x^{(k)} + (I - G)A^{-1}r^{(k)}$$

Forma do método iterativo com o resíduo

Esta forma permite de ver como o erro entre duas iterações consecutivas $x^{(k+1)} - x^{(k)}$ depende da matriz A , da matriz de iteração considerada e do resíduo $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$ da iterada anterior $x^{(k)}$.

Geometricamente ou graficamente num plano em \mathbb{R}^n o vetor distancia $d^{(k)} = (I - G)A^{-1}r^{(k)}$ é aquele que se pode somar a $x^{(k)}$ para chegar a $x^{(k+1)}$.

Esta forma é muito usada nos algoritmos que computam o resíduo $r^{(k)}$ porque por exemplo usam como critério $\|b - Ax^{(k)}\| < \epsilon$ e portanto necessitam de computar em qualquer caso o resíduo $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$

Teorema de convergência dos métodos iterativos

Teorema 1

O método iterativo $x^{(k+1)} = Gx^{(k)} + c$ converge por uma qualquer $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ inicial se e só se $\lim_{k \rightarrow \infty} \|G^k\| = 0$ por uma qualquer norma de matrizes $\|\cdot\|$

Lembre que uma **norma de matrizes** induzida de uma norma

vetorial é $\|A\| := \sup_{x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$

Teorema 1 de convergência dos métodos iterativo, Demonstração

Demonstração.

Usando a definição do vetor erro $e^{(k)} = x - x^{(k)}$ $e^{(k+1)} = x - x^{(k+1)} = x - Gx^{(k)} - c = Gx + c - Gx^{(k)} - c = G(x - x^{(k)}) = Ge^{(k)}$. portanto obtemos

$$e^{(k+1)} = Ge^{(k)}$$

ou seja a matriz de iteração contrai o erro do passo anterior. Desta última equação obtemos

$$e^{(k+1)} = Ge^{(k)} = G^2e^{(k-1)} = \dots = G^{k+1}e^{(0)}$$

e analogamente $e^{(k)} = G^k e^{(0)}$. Por isso teremos convergência por cada $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ se $\lim e^{(k)} = 0 \iff \lim G^k e^{(0)} = 0$ por cada $e^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ e este acontece somente se $\lim_{k \rightarrow \infty} \|G^k\| = 0$. □

Condição suficiente para a convergência dos métodos iterativos

Uma condição que leva o método $x^{(k+1)} = Gx^{(k)} + c$ a ser convergente é que a norma da matriz de iteração é menor de 1, $\|G\| < 1$ está é similar com aquele que acontece com os métodos do ponto fixo onde uma condição suficiente para ter convergência era de encontrar um intervalo onde $\|\varphi(x)\| < 1$.

Proposição (Condição suficiente para convergência)

Se $\|G\| < 1$ então o método $x^{(k+1)} = Gx^{(k)} + c$ converge

Demonstração.

Note que para as propriedades das normas temos

$\|G^k\| \leq \|G\| \|G\| \cdots \|G\| = \|G\|^k$. Note que se $\|G\| < 1$ para as propriedades dos limites de exponenciais com base menor de 1 (pense ao

$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 0$) temos $\lim_{k \rightarrow \infty} \|G\|^k = 0$ e sendo que $0 \leq \|G^k\| \leq \|G\|^k$ então $\lim_{k \rightarrow \infty} \|G^k\| = 0$ □

Normas induzidas de normas vetoriais

A **norma de matriz** induzida de uma norma vetorial é

$$\|A\| := \sup_{x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Exemplo de normas de matrizes: sendo que $\|x\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$,
obtemos

$$\|A\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \max_{i=1, \dots, n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

Usando que $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$, obtemos

$$\|A\|_1 = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} = \max_{j=1, \dots, n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|.$$

Splitting da matriz A , método de Jacobi

O método de Jacobi como a maioria dos métodos iterativos usam um splitting da matriz A , ou seja consideram A como soma de duas matrizes, para poder obter a matriz G e o vetor c tais que a solução do sistema $Ax = b$ é a solução de $x = Gx + c$.

Neste caso seja D a matriz diagonal de A ,

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Usaremos o splitting $A = D + (A - D)$,

supondo que D seja invertível ($a_{ii} \neq 0$) obtemos de $Ax = b$

$$\begin{aligned} Dx + (A - D)x &= b \iff Dx = (D - A)x + b \iff \\ x &= D^{-1}(D - A)x + D^{-1}b = (I - D^{-1}A)x + D^{-1}b \end{aligned}$$

Portanto usaremos no método de Jacobi:

$$G = I - D^{-1}A, \quad c = D^{-1}b$$

Método de Jacobi na forma vetorial

O método de Jacobi, também chamado método de Gauss-Jacobi, tem a iteração definida por

$$x^{(k+1)} = G_J x^{(k)} + c_J, \quad (\text{forma vetorial})$$

onde $G_J = I - D^{-1}A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $c_J = D^{-1}b \in \mathbb{R}^n$.

Pode também definir o método linha por linha,

$$x_i^{(k+1)} = (G_J x^{(k)} + c_J)_i$$

onde usamos a notação v_i para denotar a componente i do vetor v , com $i = 1, \dots, n$.

Note que $D^{-1}A = \left(\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right)_{ij}$, portanto temos

$$G_J = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & -\frac{a_{23}}{a_{22}} & \dots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \dots & \dots & -\frac{a_{nn-1}}{a_{nn}} & 0 \end{pmatrix}; \quad c_J = \begin{pmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

Método de Jacobi na forma escalar

A expressão explícita do método escrito linha por linha pode ser escrita como

$$x_i^{(k+1)} = (c_J)_i + (G_J x^{(k)})_i = (D^{-1}b)_i + ((I - D^{-1}A)x^{(k)})_i$$

ou seja na forma escalar explícita

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

por cada $i = 1, \dots, n$.

Esta última forma é mais fácil para ser implementada num algoritmo.

Forma alternativa vetorial e escalar

Sabemos que um método iterativo, $x^{(k+1)} = Gx^{(k)} + c$ pode sempre ser escrito como $x^{(k)} + (I - G)A^{-1}r^{(k)}$ com a iteração anterior escrita explicitamente e em função do resíduo $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$. Portanto sendo $G_J = I - D^{-1}A$ teremos esta forma alternativa vetorial **simples** do método de Jacobi:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + (I - G_J)A^{-1}r^{(k)} = x^{(k)} + D^{-1}r^{(k)}$$

No caso escalar temos:

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{1}{a_{ii}}r_i^k, \quad \text{por cada } i = 1, \dots, n$$

onde usamos que $r_i^{(k)} = b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j^{(k)}$, por cada $i = 1, \dots, n$.

Matriz com diagonal estritamente dominante por linhas (critério das linhas)

Definição

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diz-se com diagonal estritamente dominante por linhas (ou que satisfaz o critério das linhas) se e só se $|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|$ por cada $i = 1, \dots, n$

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 1 \\ -2 & -1 & -4.5 \end{pmatrix} \text{ satisfaz o critério das linhas}$$

Condição suficiente para a convergência

Proposição (1ª condição suficiente para a convergência)

Se a matriz A for com diagonal estritamente dominante por linhas (ou equivalentemente se satisfazer o critério das linhas) então o método de Jacobi converge.

Demonstração.

Provamos que se A for com diagonal estritamente dominante então $\|G_J\|_\infty < 1$ e este pela propriedade dos métodos iterativos (ver slide 13) garante a convergência do método. Sendo que $G_J = (g_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ com $g_{ii} = 0$ e $g_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}, i \neq j$, então

$$\|G_J\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} \left(\sum_{j=1}^n |g_{ij}| \right) = \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1, j \neq i}^n \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| = \max_{i=1,\dots,n} \frac{\sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|}{|a_{ii}|} < 1$$

Note que usamos a hipótese que a matriz A satisfaz o critério das linhas $\sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| < |a_{ii}|$. □

Portanto se A for com diagonal estritamente dominante por linhas $\lim_{k \rightarrow \infty} x_J^{(k)} = x$ onde com $x_J^{(k)}$ indicamos o valor obtido do método de Jacobi após k iterações.

Exemplo

Queremos achar uma aproximação $x^{(k)}$ da solução do seguinte sistema a menos de um erro relativo entre duas aproximações sucessivas de $\varepsilon = 0.05$, ou seja vamos parar o ciclo quando $d_r^{(k)} := \frac{\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_\infty}{\|x^{(k)}\|_\infty} < \varepsilon$

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -8 \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 6 \end{cases}$$

Notamos que A é não singular ($\det(A) = 447 \neq 0$), então existe uma única solução do sistema. Para poder aplicar o método de Jacobi observamos que os a_{ii} são diferentes de zeros, e que é satisfeito o critério

$$|a_{11}| = 10 > |a_{12}| + |a_{13}| = 2 + 1 = 3$$

das linhas porque $|a_{22}| = 5 > |a_{21}| + |a_{23}| = 1 + 1 = 2$.

$$|a_{33}| = 10 > |a_{31}| + |a_{32}| = 2 + 3 = 5$$

Portanto podemos aplicar o método de Jacobi com a certeza que convergirá (teoricamente) por cada $x^{(0)}$.

Usamos o formato escalar por linhas. $x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right)$.

Pegamos como $x^{(0)}$ o vetor $x^{(0)} = (0.7, -1.6, 0.6)^t$.

O método de Jacobi dará a seguinte iteração:

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{10} (7 - 2x_2^{(k)} - x_3^{(k)})$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{5} (-8 - x_1^{(k)} - x_3^{(k)})$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{10} (6 - 2x_1^{(k)} - 3x_2^{(k)}).$$

A primeira iteração será:

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{10} (7 + 2 \cdot 1.6 - 0.6) = 0.96$$

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{5} (-8 - 0.7 - 0.6) = -1.86$$

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{10} (6 - 2 \cdot 0.7 + 3 \cdot 1.6) = 0.94.$$

Notamos que $\max_j |x_j^{(1)}| = 1.86$ e

$$|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}| = 0.26; \quad |x_2^{(1)} - x_2^{(0)}| = 0.26; \quad |x_3^{(1)} - x_3^{(0)}| = 0.34.$$

Portanto

$$d_r^{(1)} = \frac{\|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty}{\|x^{(1)}\|_\infty} = \frac{\max_i |x_i^{(1)} - x_i^{(0)}|}{\max_i |x_i^{(1)}|} = \frac{\max\{0.26, 0.34\}}{1.86} = \frac{0.34}{1.86} = 0.1828 >$$

$0.05 = \varepsilon$.

Então temos de prosseguir até chegar ao k que satisfaz a condição de saída.

Obteremos $x^{(2)} = (0.978, -1.98, 0.966)^t$ que tem

$$d_r^{(2)} = \frac{\max\{|0.018|, |-0.12|, |0.026|\}}{|1.98|} = \frac{0.12}{1.98} = 0.0606 > \varepsilon;$$

Então continuamos com o método, a terceira iterada de Jacobi será

$x^{(3)} = (0.9994, -1.9888, 0.9984)^t$ que tem

$$d_r^{(3)} = \frac{\max\{|0.0214|, |-0.0088|, |0.0324|\}}{|-1.9888|} = \frac{0.0324}{1.9888} = 0.0163 < \varepsilon$$

Portanto a aproximação achada do método a menos de erro relativo menor de $\varepsilon = 0.05$ de duas iterações sucessivas é

$x_1 = 0.9994$, $x_2 = -1.9888$, $x_3 = 0.9984$

Exemplos com o critério das linhas não satisfeito

No caso que o sistema linear não satisfaz o critério das linhas, pode ser que trocando as equações o critério seja satisfeito e portanto o método de Jacobi convergirá após a troca. Exemplo:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = -2 \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ + 6x_2 + 8x_3 = -6 \end{cases}$$

Notamos logo na primeira linha que $|a_{11}| = 1 \not> |a_{12}| + |a_{13}| = 3 + 1 = 4$. Portanto o critério das linhas não é satisfeito (a diagonal não é estritamente dominante por linhas). Mas se trocamos a primeira linha com a segunda obtemos

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = -2 \\ + 6x_2 + 8x_3 = -6 \end{cases}$$

temos por cada $i = 1, 2, 3$ que $|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|$. Portanto o método de Jacobi convergirá com este sistema, também porque A é não singular e tem $a_{ii} \neq 0$.

Critério ds colunas: outra condição suficiente para convergência do método de Jacobi

Definição

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diz-se que tem a diagonal estritamente dominante por colunas (ou que satisfaz o critério das colunas) se

$$|a_{jj}| > \sum_{i=1, i \neq j}^n |a_{ij}|, \quad \text{por cada } j = 1, \dots, n$$

Proposição 2ª Condição suficiente para a convergência

Se a matriz A for com diagonal estritamente dominante por colunas (ou equivalentemente se satisfaz o critério das colunas) então o método de Jacobi converge.

Demonstração.

Prova se que a hipótese implica que $\|G_J\|_1 < 1$ e portanto o método de Jacobi converge □

Exemplo de sistema que satisfaz o critério das colunas

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - 6x_2 + 2x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 4 \end{cases}$$

Note que este sistema não satisfaz o critério das linhas porque

$$|a_{11}| = 3 \not> |a_{12}| + |a_{13}| = 5,$$

mas satisfaz o critério das colunas porque

$$|a_{11}| = 3 > |a_{21}| + |a_{31}| = 1 + 1 = 2;$$

$$|a_{22}| = 6 > |a_{12}| + |a_{32}| = 4 + 1 = 5;$$

$$|a_{33}| = 4 > |a_{13}| + |a_{23}| = 1 + 2 = 3.$$

Portanto o método de Jacobi convergirá.

Diagonal dominante por linhas não estritamente

Definição

Uma matriz A diz-se que tem a diagonal dominante por linhas (critério

das linhas fraco) se por cada $i = 1, \dots, n$ tem $|a_{ii}| \geq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|$

e se ao mesmo tempo existir pelo menos um $s = 1, \dots, n$ tal que

$$|a_{ss}| > \sum_{j=1, j \neq s}^n |a_{sj}|$$

Veja que a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & -3 \\ 2 & -3 & 6 \end{pmatrix}$ é diagonal dominante por linha

com $s = 2, 3$, mas não estritamente, porque

$$|a_{11}| = 2 = |a_{12}| + |a_{13}| = 2,$$

$$|a_{22}| = 5 > |a_{21}| + |a_{23}| = 4$$

$$|a_{33}| = 6 > |a_{31}| + |a_{32}| = 5$$

Diagonal dominante por colunas não estritamente

Definição

Uma matriz A diz-se que tem a diagonal dominante por colunas (critério das colunas fraco) se por cada $j = 1, \dots, n$ tem

$$|a_{jj}| \geq \sum_{i=1, i \neq j}^n |a_{ij}|$$

e se ao mesmo tempo existir pelo menos um $s = 1, \dots, n$ tal que

$$|a_{ss}| > \sum_{i=1, i \neq s}^n |a_{is}|$$

3ª Condição suficiente para a convergência do método de Jacobi

Proposição 3ª Condição suficiente para a convergência

Se a matriz A tem todos os coeficientes não nulos e se for com diagonal dominante por linhas ou por colunas (ou equivalentemente se satisfaz o critério das linhas ou das colunas fraco) então o método de Jacobi converge.

Exemplo:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 - 4x_2 = -6 \end{cases}$$

A matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ do sistema satisfaz o critério das linhas fraco, e tem todos os $a_{ij} \neq 0$ portanto sendo também que $\det(A) = -5 \neq 0$ é esperado que o método de Jacobi convirja

Resolvendo o sistema com $\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 - 4x_2 = -6 \end{cases}$ com Jacobi:

Tomamos por facilidade nos cálculos $x^{(0)} = (0, 0)^t$,

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(0)}) = 4$$

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(0)}) = \frac{6}{4} = 1.5$$

$$x_1^{(2)} = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(1)}) = \frac{1}{1}(4 - 1.5) = 2.5$$

$$x_2^{(2)} = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(1)}) = -\frac{1}{4}(-6 - 4) = 2.5$$

$$x_1^{(3)} = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(2)}) = 1.5$$

$$x_2^{(3)} = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(2)}) = \frac{17}{8}$$

$$x_1^{(4)} = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(3)}) = \frac{15}{8} \approx 2$$

$$x_2^{(4)} = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(3)}) = \frac{15}{8} \approx 2$$

Portanto notamos que o método de Jacobi está convergindo a solução teórica $x = (2, 2)^t$.

Se considerássemos o problema com a mesma solução $x = (2, 2)^t$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 = -6 \\ x_1 + x_2 = 4 \end{cases}$$
 Notamos que não satisfaz nenhum dos três critérios de colunas ou linhas vistos.

Se mesmo assim aplicássemos o método de Jacobi obteremos, partindo de $x^{(0)} = (0, 0)^t$, :

$$x^{(1)} = (-2, 3)^t$$

$$x^{(2)} = (6, 6)^t$$

$$x^{(3)} = (18, -2)^t$$

$$x^{(4)} = (-14, 14)^t$$

Então o método de Jacobi não está convergindo a solução certa do sistema, os vetores $x^{(k)}$ estão divergindo.