## 1.3 Condicionamento de Algoritmos

Nesta seção, apresentamos algumas palavras sobre bom/mau condicionamento de algoritmos.

A noção de problemas bem-postos foi formalizada pelo matemático Hadamard [Hadamard, 1902], no início do século XX. Segundo esta noção, se um problema tem uma solução única e se pequenas perturbações nos dados de entrada provocam pequenas perturbações nos resultados, então este problema é bem-posto. Esta última condição é chamada estabilidade do problema com relação aos dados.

O termo *estabilidade* tem um significado análogo quando usado para qualificar um método numérico: a estabilidade (ou instabilidade) nos dá informações sobre a sensibilidade do método aos erros de arredondamento acumulados nos cálculos.

Dizemos que um método é *estável* se pequenas perturbações nos dados conduzem a soluções próximas. Se isso não ocorre, dizemos que o método é *instável*. Algumas definições mais precisas são usadas em tópicos específicos, como é o caso das equações diferenciais ordinárias.

Pode acontecer o caso do problema matemático ser bem-posto e, no cálculo de soluções aproximadas, usarmos algoritmos instáveis. Neste caso, podemos obter maus resultados, apesar do problema matemático ser bem-posto. Como exemplo consideremos o cálculo de raízes de equações do segundo grau, descrito a seguir.

**Exemplo 1.3.1.** As raízes da equação $ax^2 - bx + c = 0$, onde $a$ e $b$ são números positivos, podem ser calculadas por

$$x_1 = \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x_2 = \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Se $b^2 >>> 4ac$, o cálculo de $x_2$ envolverá a diferença de dois números próximos, o que provoca perda de dígitos significativos. A resposta sofrerá influência desta perda. Uma alternativa pode ser calcular $x_1$ como proposto e usar a propriedade de raízes de equações do segundo grau: $x_1\,x_2 = c/a$.

Como ilustração numérica consideremos a equação

$$x^2 - 100.22x + 1.2371 = 0.$$

Usando aritmética ponto flutuante com cinco dígitos temos

$$\begin{aligned} &b^2 = 10044\\ &b^2 - 4ac = 10039\\ &\sqrt{b^2 - 4ac} = 100.19. \end{aligned}$$

Calculando as raízes pelas fórmulas apresentadas no primeiro procedimento temos

$$\begin{aligned} x_1 &= (100.22 + 100.19)/2 = 100.20\\ x_2 &= (100.22 - 100.19)/2 = 0.015. \end{aligned}$$

Por outro lado, usando o valor de $x_1$ e o segundo procedimento temos

$$x_2 = \frac{c}{a\,x_1} = 1.2371/100.20 = 0.012346.$$

Numa calculadora com mais dígitos (16, por exemplo) e usando a segunda alternativa, teríamos

$$x_1 = 100.2076546 \qquad\qquad x_2 = 0.012345364.$$

Para quantificar a diferença entre os dois procedimentos, observamos que o erro relativo da aproximação $x_2$, usando o primeiro processo, é de 21.5%, ao passo que, usando o segundo procedimento, teríamos uma aproximação com erro relativo de 0.0052%. □