Interpolação. Condicionamento dos Sistemas Lineares. Forma clássica e de Lagrange

MS211 – Cálculo Numérico

Giuseppe Romanazzi

4 Agosto 2020

Conteúdo

Introdução

Nesta aula vamos apresentar a técnica numérica de interpolação polinomial, que resulta ser útil para descrever um problema e em quais problemas resulta ser uma estrategia útil para descrever e aproximar matematicamente o problema.
Vamos também apresentar algumas slides sobre o condicionamento na resolução de sistemas lineares, porque a base das potencias clássicas $\{x^k\}$ para construir os polinômios gera na construção do polinômio interpolador um sistema linear mal condicionado, ou seja o problema de resolver o sistema linear obtido resulta ser mal posto. Por isso introduziremos a forma de Lagrange, que evitará de resolver um sistema mal condicionado.

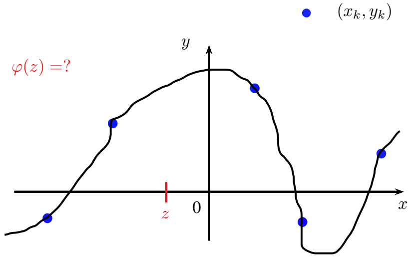
Conteúdo

Interpolação

Este problema aparece quando se deseja encontrar uma função $\varphi(x)$ que descreve ou aproxima o fenômeno descrito das observações (x_k, y_k) com $k = 1, \ldots, m$. Sabemos que se m é muito grande podemos usar o método dos quadrados mínimos mas em vez se for m não grande podemos usar a técnica da interpolação que consiste no encontrar uma função $\varphi(x)$ que satisfaz exatamente $\varphi(x_k) = y_k$ para cada $k = 1, \ldots, m$

Exemplo gráfico da interpolação

Um satélite mediu na superfície de Marte várias alturas y_k nos pontos x_k respeito a uma determinada altura de referencia de uma vale do planeta. Quer se conhecer a altura da superfície marciana no ponto z. Podemos determinar a curva interpolante nas medidas obtidas, e aproximar a altura em z com $\varphi(z)$



Surgem várias perguntas: Existe uma única φ interpoladora, ou seja tal que $\varphi(x_k) = y_k$?
Qual é o erro no aproximar a altura exata (y no ponto z) com o

- Não existe claramente uma só função contínua que passa para os m pontos (x_k, y_k). Existem infinitas funções!
  Por isso o problema é muito mal posto, temos de fixar algumas condições sobre as funções $\varphi(x)$ para usar. Na mesma maneira como nos PQM decidimos escolher um modelo (classe de funções) que descreve o fenômeno.
- Dependendo da classe de funções usadas podemos ter ou menos uma estimativa dos erros no aproximar o problema descrito por (x_k, y_k) no ponto z com o valor da função interpoladora $\varphi(z)$
- Usando como classe de funções onde buscar a função interpoladora aquela dos polinômios de um grau de terminado dos pontos m observados, podemos responder afirmativamente as duas perguntas em cima: existe um único polinômio e podemos estimar o erro cometido

Polinômios

Definição

Seja n um numero natural $n \in \mathbb{N}$. Um polinômio de grau menor ou igual a n é uma função $p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$. Se $a_n \neq 0$ teremos um polinômio de grau n, caso contrário $p_n(x)$ será um polinômio de grau menor de n.

Por exemplo:
$p(x) = x^2 - 2$ é um polinômio de grau 2
$p(x) = -100$ é um polinômio de grau 0
$p(x) = x + x^3 - x^2$ é um polinômio de grau 3
$p(x) = \frac{1}{x}$ não é um polinômio
$p(x) = 2^x + x^2 + x$ não é um polinômio Note que polinômios de grau zero são as funções constantes $p(x) = c$ com c um real qualquer.

Interpolação

Os polinômios representam uma boa classe de funções interpoladoras porque:

1. é barato computar um polinômio $p(x)$ porque apresenta só produtos e somas. Note que $ax^3 + bx^2 + c = x * x * (a * x + b) + c$
2. vale que cada função continua $f(x)$ é sempre bem aproximada de um polinômio.
   Teorema de Weierstrass: Para cada $f \in C[a, b]$ e $\varepsilon > 0$ existe sempre um polinômio p_n de grau n tal que $|f(x) - p_n(x)| < \varepsilon$ para cada $x \in [a, b]$.
3. Este teorema pode ser mostrado no entorno de um ponto z dado: escrevemos a expansão em serie de Taylor da f e truncamos até o resto $r_n(x) = f^{(n+1)}(\xi)\frac{(x-z)^{n+1}}{(n+1)!}$ é suficientemente pequeno $(|r_n(x)| < \varepsilon$ $f(x) = p_n(x) + r_n(x)$
4. O problema é que doutro lado não vale que n grande

Propriedade importante da interpolação polinomial

Proposição

Dada uma sequencia de $m = n + 1$ *pontos* $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ *e uma função* f *definida nestes pontos,* **existe um único** *polinômio* $p_n(x)$ *de grau até* n *(ou analogamente de grau menor ou igual a* n*) tal que*

$$p_n(x_i) = f(x_i) \quad \text{para cada } i = 0, \ldots, n$$

Note que esta propriedade generaliza o fato geométrico que:

- Dado
- Dados dois pontos $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$ existe uma única reta $r(x) = a + bx$ que passa para eles
- Dados três pontos $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ existe uma única parabola $p(x) = a + bx + cx^2$ que passa para estes pontos

Esta propriedade é fácil para provar para cada $n >= 0$ sendo que

- um polinômio de grau até n $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ é unicamente determinado uma vez que determinamos os seus $n+1$ coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$.
- determinamos estes coeficientes usando que $p_n(x_i) = f(x_i)$ com $i = 0, \ldots, n$
  obteremos assim $n+1$ equações lineares para resolver, e assim chegaremos aos coeficientes a_i

Sistema linear obtido com o polinômio interpolador na forma clássica das potências

O sistema linear nos coeficientes incógnitos a_i que se obtém usando $p_n(x_i) = f(x_i)$, com $i = 0, \ldots, n$ é

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots a_n x_0^n = f(x_0) \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots a_n x_1^n = f(x_1) \\ \ldots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots a_n x_n^n = f(x_n) \end{cases}$$

No formato matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ \ldots & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix} \qquad (1)$$

O sistema linear (1) admite uma única solução cada vez que escolhemos $n+1$ pontos distintos, isso porque neste caso a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \dots & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix}$$

terá $n+1$ colunas linearmente independentes. Assim o sistema (1) admitirá uma única solução $\{a_i\}_{i=0,\dots,n}$ que determinará então o único polinômio interpolador de grau menor ou igual a n

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i.$$

Note que pode acontecer que $a_n = 0$ e naquele caso $p_n(x)$ terá ordem $n-1$.

Exemplo

x_k	0.1	0.2	0.3	0.4
$f(x_k)$	5	13	-4	-8

O sistema linear obtido é

$$\begin{cases} a_0 + a_1 0.1 + a_2 0.01 + a_3 0.001 = 5 \\ a_0 + a_1 0.2 + a_2 0.04 + a_3 0.008 = 13 \\ a_0 + a_1 0.3 + a_2 0.09 + a_3 0.027 = -4 \\ a_0 + a_1 0.4 + a_2 0.16 + a_3 0.064 = -8 \end{cases}$$

Resolvendo com a Eliminação de Gauss com 3 dígitos significativos $a_0 = -0.668 \cdot 10^{-2}$, $a_1 = 0.116 \cdot 10^4$, $a_2 = -0.505 \cdot 10^4$, $a_3 = 0.633 \cdot 10^4$ e então $p_3(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$.
Observamos que $p_3(0.4) = -5.68 \neq -8$.
Então algum erro de arredondamento levou a um erro no calculo da solução do sistema linear. Isso aconteceu porque o sistema linear é mal condicionado: o problema de resolver este sistema linear é mal posto.

Sistemas lineares mal condicionados

Definição

Um sistema linear $Ax = b$ diz se mal condicionado se o numero de condicionamento $\mu(A) := \|A\|\|A^{-1}\|$ resulta ser grande

Proposição

Resolver um sistema linear mal condicionado é um problema mal posto

Porque vale o seguinte Teorema

Teorema de condicionamento de um sistema linear

Considere um erro δA na matriz dos coeficientes e δb o erro no vetor dos termos independentes então o sistema (com os erros em A e b)

$$(A + \delta A)y = b + \delta_b$$

admite a solução $y = x + \delta x$, onde x é a solução exata do problema $Ax = b$ (sem erros nos input A e b).
Então vale o seguinte
o erro relativo (de output) $\frac{\|\delta x\|}{\|x\|}$ satisfaz a seguinte estimativa

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \mu(A) \frac{\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}}{1 - \mu(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}$$

No exemplo anterior a matriz de ordem 4

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \end{pmatrix}$$

com $x_0 = 0.1$, $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.3$, $x_3 = 0.4$ tem numero de condicionamento grande $cond(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty = 2165,3$. Portanto o problema de resolver $Ax = b$ é mal posto, e isso explica porque o método de eliminação de Gauss falhou no achar a solução exata do problema.

Resolver sistema lineares mal condicionado com algoritmos estáveis e instáveis

- É sempre esperável de ter sempre erro se resolvemos numa aritmética finita um sistema linear mal condicionado (ou analogamente mal posto), usando um qualquer método numérico.
- Ao usar algoritmos estáveis este erro numérico vai ser menor de que usar algoritmos instáveis.
- no nosso exemplo se usássemos Eliminação com pivotamento (parcial) com 3 dígitos significativos teremos $a_0 = -0.668 \cdot 10^{-2}$, $a_1 = 0.116 \cdot 10^4$, $a_2 = -0.505 \cdot 10^4$ e $a_3 = 0.630 \cdot 10^4$.
  Com estes coeficientes $p_3(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ terá $p_3(0.4) = -7.6$, então respeito ao $p_3(0.4) = -5.68$ obtido com a simples eliminação de Gauss estamos mais próximos do valor exato do problema $p_3(0.4) = -8$. Ma cometemos sempre um erro no output.

Forma polinomiais na interpolação

A forma polinomial vista até agora $p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ chamada forma clássica ou forma das potências leva sempre a um sistema linear mal condicionado quando impomos que

$$p_n(x_i) = f(x_i)$$

ou seja quando procuramos o polinômio interpolador $p_n(x)$ da $f(x)$ nos pontos x_i.

Por isso precisaremos usar outras formas polinomiais.

Forma de Lagrange

Considerados os $n+1$ pontos $x_0, x_1, \ldots, x_n$, o único polinômio $p_n(x)$ de grau até n que interpola f nos pontos x_i ou seja tal que

$$p_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \ldots, n$$

pode ser escrito na forma de Lagrange

$$p_n(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \ldots y_n L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x), \quad \text{onde } y_i = f(x_i)$$

onde os $L_k(x)$ com $k = 0, \ldots, n$,
são chamados polinômios de Lagrange

$$L_k(x) = \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)}.$$

Propriedades da forma de Lagrange

Note que

- cada $L_k(x)$ é um polinômio de grau n
- $L_k(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{se } j \neq k \\ 1 & \text{se } j = k \end{cases}$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x_j) = y_j L_j(x_j) = y_j = f(x_j)$ portanto

  $\displaystyle p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x)$ é o único polinômio de grau até n que interpola f nos pontos x_j, ou seja tal que $p_n(x_j) = f(x_j)$.
- A forma de Lagrange é explicita e simples, não precisamos de resolver algum sistema linear

Exemplo

x_k	-1	0	2
$f(x_k)$	4	1	-1

Determinamos os polinômios de Lagrange associados a estes 3 pontos

$$L_0(x) = \prod_{i=0, i\neq 0}^{2} \frac{x - x_i}{x_0 - x_i} = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \cdot \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} = \frac{x - 0}{-1 - 0} \cdot \frac{x - 2}{-1 - 2} = \frac{x^2 - 2x}{3}$$

$$L_1(x) = \prod_{i=0, i\neq 1}^{2} \frac{x - x_i}{x_1 - x_i} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \cdot \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{x + 1}{0 + 1} \cdot \frac{x - 2}{0 - 2} = \frac{-x^2 + x + 2}{2}$$

$$L_2(x) = \prod_{i=0, i\neq 2}^{2} \frac{x - x_i}{x_2 - x_i} = \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{(x + 1)x}{3 \cdot 2} = \frac{x^2 + x}{6}$$

Então o polinômio de grau 2 interpolante nos pontos $(x_k, f(x_k))$ com $k = 0, 1, 2$ é

$$p_2(x) = \sum_{k=0}^{2} f(x_k) L_k(x) = 4 \cdot L_0(x) + 1 \cdot L_1(x) - 1 \cdot L_2(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{7}{3}x + 1$$