MS211, Cálculo Numérico, Turma E
Primeiro Semestre de 2020, UNICAMP

Resoluçao Lista de Exercícios 4(*)

Entrega por Google Classroom dos dois exercícios marcados com (*) até Sábado 13/06/2020.
Os dois exercícios (*) podem ser desenvolvidos em grupos de até dois membros.

4 (*) (Exemplo de modelagem) Seja r a taxa de juro mensal (se for por exemplo $r = 0.5$ está corresponde a percentagem 50%) de uma conta num fundo monetário. Se uma pessoa investe p inicialmente, depois m meses tem na conta $f(m) = p \cdot (1 + r)^m$.

- Porquê o valor da conta depois m meses é $f(m)$?
- Imagina que um cliente quer retirar o dinheiro quando tem na conta $4\sqrt{m} + 10000$ reais depois m meses investidos. Quantos meses m^* tem de esperar para retirar o seu dinheiro da conta?
- Determine m^* se usar taxa $r = 3\%$ e tem investido inicialmente 1000 reais. Usar o método de Newton para resolver este problema.
  - Qual condição inicial m_0 pode usar, para que o método converge? (Dica: Veja o Teorema de convergência do método de Newton em pagina 25, Encontra ele chutando um m_0 inicial que satisfaz as condições do teorema. Tente chutar m_0 como múltiplo de 10).
  - Com a escolha $\epsilon = 10^{-2}$, $|f(x_k)| < \epsilon$, em quantas iterações o método satisfaz esta condição? A resposta vem depois aplicando o método.
  - Com a escolha $\epsilon = 10^{-2}$, $|x_k - x_{k-1}| < \epsilon$, em quantas iterações o método satisfaz esta condição?
  - Com a escolha $\epsilon = 10^{-2}$, $|x_k - \xi| < \epsilon$, em quantas iterações o método satisfaz esta condição? Para responder a esta pergunta, lembre que do teorema da aula 10 (slide 11) vale que $|x_k - \xi| < \frac{M}{1-M}|x_k - x_{k-1}|$ portanto para ter $|x_k - \xi| < \varepsilon$ pode verificar se $\frac{M}{1-M}|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$

Resoluçao (4):

- Porquê o valor da conta depois m meses é $f(m)$?
  Resposta:
  A formula $f(m) = p(1 + r)^m$ é correta porque $f(0) = p(1 + r)^0 = p$ onde p é mesmo

a quantidade da conta no inicio , mês 0. No mês 1 a conta sendo que tem taxa r de juros vai ter $p + p * r$ por isso $f(1) = p(1 + r)$ é um valor correto. Em geral se no mês m tem $f(m)$ no mês $m+1$ tem de ter $f(m) + r * f(m) = (1+r) * f(m)$. Então observamos que :

$$
\begin{aligned}
&f(1) = (1+r)f(0) = p(1+r)\\
&f(2) = (1+r)f(1) = (1+r) * p(1+r) = p(1+r)^2\\
&f(3) = (1+r) * p(1+r)^2 = p(1+r)^3\\
&\dots\\
&f(m) = p(1+r)^m
\end{aligned}
$$

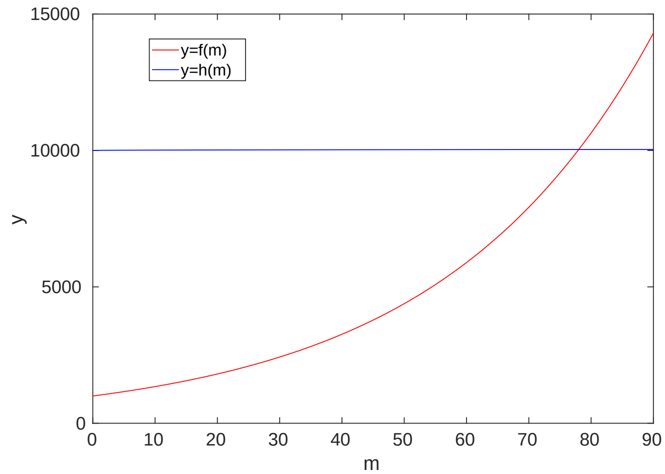
- Imagina que um cliente quer retirar o dinheiro quando tem na conta $4\sqrt{m} + 10000$ reais depois m meses investidos. Quantos meses m^* tem de esperar para retirar o seu dinheiro da conta?

  Resposta:
  Num mês m a conta vai ter $f(m) = p(1+r)^m$, sendo que queremos retirar o dinheiro quando na conta depois m meses temos $4\sqrt{m}+10000$, este aconcerá quando $f(m) = 4\sqrt{m} + 10000$, portanto temos de terminar o mês m^* que satisfa a equação $f(m^*) = 4\sqrt{m^*} + 10000$, ou seja que satisfaz
  $p(1+r)^{m^*} = 4\sqrt{m^*} + 10000.$
  Esta m^* pode ser determinado resolvendo esta equação não linear $p(1+r)^{m^*} = 4\sqrt{m^*} + 10000$ usando um método numérico para procurar o zero de $g(m) = p(1+r)^m - 4\sqrt{m} - 10000$.

- Determine m^* se usar taxa $r = 3\%$ e tem investido inicialmente 1000 reais. Usar o método de Newton para resolver este problema.
  - Qual condição inicial m_0 pode usar, para que o método converge? (Dica: Veja o Teorema de convergência do método de Newton em pagina 25, Encontra ele chutando um m_0 inicial que satisfaz as condições do teorema. Tente chutar m_0 como múltiplo de 10).

    Resposta:
    Temos de aplicar o método de Newton para encontrar o zero da função $g(x) = 10^3(1.03)^m - 4\sqrt{m} - 10^4$. Note que 3% corresponde a $r = 0.03$. Notamos que podemos escrever $g(m)$ como a diferença $g(m) = f(m) - h(m)$ onde $f(m) = 10^3(1.03)^m$ e $h(m) = 4\sqrt{m} + 10^4$. Portanto cada zero de g é um mês m para que $f(m) = h(m)$, ou seja é um m onde as duas curvas $y = f(m)$ e $y = h(m)$ se intersecam no plano $\hat{m}y$. Observamos que existe um único zero de $g(m)$, isso porque a função $f(m) = 10^3 * 1.03^m$ cresce exponencialmente em vez a função $h(m) = 4\sqrt{m} + 10^4$ cresce como potência de grau fixa $\frac{1}{2}$.
    Observamos em particular que $f(0) = 10^3 < h(0) = 10^4$ portanto a função f que é crescente parte em baixo respeito a função g que é também positiva. Mas sendo que $f'(m) = 10^3 * 1.03^m * ln(1.03) > h'(m) = \frac{2}{m^{\frac{1}{2}}}$ por cada $m > 0.004577$

então temos que f cresce mais rapidamente de h praticamente por cada $m > 0$ e portanto $f(m) = h(m)$ pode acontecer somente num único m, portanto o zero m^* de $g(m) = f(m) - h(m)$ é único.
Fazendo os plots de $y = f(m)$ e $y = h(m)$



Observamos que para ter convergência do método de Newton para procurar este único zero $m^* > 0$ de $g(m)$ precisamos, analisando o teorema de convergência método de Newton que, encontrar um intervalo I que contem a raiz m^* tal que

- $g'(m^*) \neq 0$
- g, g', g'' continuas no intervalo I
- $\exists\ 0 < M < 1$ tal que $\forall m \in I$: $\left|\dfrac{g(m)g''(m)}{g'(m)^2}\right| \leq M < 1$,

então se m_0 é tomado dentro este intervalo I o método de Newton $m_{k+1} = m_k - \dfrac{g(m_k)}{g'(m_k)}$ convergirá a m^*.

$g(m) = 10^3 \cdot 1.03^m - 4\sqrt{m} - 10^4$ é continua por cada $m > 0$.
$g'(m) = 10^3 \cdot 1.03^m \ln(1.03) - \frac{2}{\sqrt{m}}$ é continua por cada $m > 0$.
$g''(m) = 10^3 \cdot 1.03^m(\ln(1.03))^2 + \frac{1}{\sqrt{m^3}}$ é também continua por cada $m > 0$.

Verificamos agora se existe um intervalo I que contem a raiz e tal que:

$$|\frac{g(m)g''(m)}{g'(m)^2}| < 1.$$

Este significa que precisamos encontrar um $I = [a, b]$ onde $g(a) * g(b) < 0$ e tal que

$$|g(m)g''(m)| < |g'(m)^2|. \tag{1}$$

Como sugerido na dica, chutamos o m com múltiplo de 10, e avaliamos quando a relação (1) é verificada.

m	$g(m)$	$\|g(m)g''(m)\|$	$\|g'(m)^2\|$	relação (1)
10	$-8.6687 \cdot 10^3$	$1.0453 \cdot 10^4$	$1.5282 \cdot 10^3$	não
20	$-8.2218 \cdot 10^3$	$1.3050 \cdot 10^4$	$2.802 \cdot 10^3$	não
30	$-7.5946 \cdot 10^3$	$1.6153 \cdot 10^4$	$5.0954 \cdot 10^3$	não
40	$-6.7663 \cdot 10^3$	$1.9303 \cdot 10^4$	$9.2363 \cdot 10^3$	não
50	$-5.6444 \cdot 10^3$	$2.1636 \cdot 10^4$	$1.6719 \cdot 10^4$	não
60	$-4.1394 \cdot 10^3$	$2.1317 \cdot 10^4$	$3.0238 \cdot 10^4$	SIM
70	$-2.1156 \cdot 10^3$	$1.4640 \cdot 10^4$	$5.4664 \cdot 10^4$	SIM
80	605.1135	$5.6267 \cdot 10^3$	$9.8790 \cdot 10^4$	SIM
90	$4.2625 \cdot 10^3$	$5.3264 \cdot 10^4$	$1.7850 \cdot 10^5$	SIM
100	$9.1786 \cdot 10^3$	$1.5413 \cdot 10^5$	$3.2249 \cdot 10^5$	SIM

Notamos que um bom intervalo $I = [a, b]$ com $g(a) * g(b) < 0$ e onde o critério (1) é satisfeito é por exemplo $[60, 100]$. Então uma qualquer $m_0 \in [60, 100]$ implicará que o método de Newton convergirá.

– Com a escolha $\epsilon = 10^{-2}$, $|f(x_k)| < \epsilon$, em quantas iterações o método satisfaz esta condição? A resposta vem depois aplicando o método.

Resposta:
Aplicando o método de Newton com $m_0 = 60$, obtemos

k	m_k	$\|g(m_k)\|$
0	60	$4.1394 \cdot 10^3$
1	83.8045	$1.8708 \cdot 10^3$
2	78.4860	139.7467
3	78.0210	0.9569
4	78.0178	$4.5689 \cdot 10^{-5}$

então após 4 iterações satisfazemos $|g(m_k)| < 10^{-2}$.

– Com a escolha $\epsilon = 10^{-2}$, $|x_k - x_{k-1}| < \epsilon$, em quantas iterações o método satisfaz esta condição?

Resposta:
Aplicando o método de Newton com $m_0 = 60$, obtemos

k	m_k	$\|m_k - m_{k-1}\|$
0	60	–
1	83.8045	23.8045
2	78.4860	5.3185
3	78.0210	0.4650
4	78.0178	0.0032

após 4 iterações satisfaremos $|m_4 - m_3| = 0.0032 < 10^{-2}$.

– Com a escolha $\epsilon = 10^{-2}$, $|x_k - \xi| < \epsilon$, em quantas iterações o método satisfaz esta condição? Para responder a esta pergunta, lembre que do teorema da aula 10 (slide 11) vale que $|x_k - \xi| < \frac{M}{1-M}|x_k - x_{k-1}|$ portanto para ter $|x_k - \xi| < \varepsilon$ pode verificar se $\frac{M}{1-M}|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$

Resposta:

No nosso caso, m^* é a ξ zero da função g. Lembramos também que a derivada da função de iteração do método de Newton é $\varphi'(m) = \dfrac{g(m)g''(m)}{g'(m)^2}$ portanto o M será no intervalo I definido como $M := \sup_{m \in I} |\dfrac{g(m)g''(m)}{g'(m)^2}|$ Se reutilizo os valores da tabela anterior, obtenho o seguintes valore para $|\dfrac{g(m)g''(m)}{g'(m)^2}|$ em $[60, 100]$

m	$\|g(m)g''(m)\|$	$\|g'(m)\|^2$	$\frac{\|g(m)g''(m)\|}{\|g'(m)\|^2}$
60	$2.1317 \cdot 10^4$	$3.0238 \cdot 10^4$	0.7050
70	$1.4640 \cdot 10^4$	$5.4664 \cdot 10^4$	0.2678
80	$5.6267 \cdot 10^3$	$9.8790 \cdot 10^4$	0.0578
90	$5.3264 \cdot 10^4$	$1.7850 \cdot 10^5$	0.2984
100	$1.5413 \cdot 10^5$	$3.2249 \cdot 10^5$	0.478

então posso pegar um $M \geq 0.7050$ e menor de 1. Para o crescimento de $|g'(m)^2|$ e $|g(m)g''(m)|$ parece que o M em I não ultrapassará 0.7050 então posso pegar $M = 0.7050$. Mas note que se pegasse $M = 0.8$ (ou um qualquer $M \in [0.7050, 1[$) ainda terei que a relação $|m_k - m^*| < \frac{M}{1-M}|m_k - m_{k-1}|$ será valida. Agora então com $M = 0.7050$ temos de encontrar o k para que $|m_k - m_{k-1}| < \frac{(1-M)\varepsilon}{M}$ e este garantirá que $|m_k - m^*| < \varepsilon$. Então é suficiente aplicar o nosso método de Newton, com a condição de saída $|m_k - m_{k-1}| < \frac{(1-0.7050)10^{-2}}{0.7050} = 0.0042$ para garantir que $|m_k - m^*| < 10^{-2}$. Aplicamos com $m_0 = 60$ e obtemos como antes

k	m_k	$\|m_k - m_{k-1}\|$
0	60	$-$
1	83.8045	23.8045
2	78.4860	5.3185
3	78.0210	0.4650
4	78.0178	$0.0032 < 0.0042$

Portanto novamente após 4 iterações temos também que $|m_4 - m^*| < 10^{-2}$.

O zero do problema é $m^* = 78.017774679446390$ meses (como é obtido indo em frente com as iterações). Portanto o critério do teorema funcionou!

7 (*) Considere a função $f(x) = cos(2x) - x^2$,

- Faça o gráfico desta função em $[a, b] \subset [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$, somente dando os valores da f num numero finito de pontos em $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$
- Quantos zeros tem a função? Verifique se os zeros da função f são simétricos respeito o eixo das y.
- Achar uma função $\varphi(x)$ tal que o seu ponto fixo seja zero de $f(x)$.

- Verifique se esta função $\varphi(x)$ é tal que o método do ponto fixo $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ converge **a um seu zero positivo**. Ou seja pelo teorema de convergência, tem de encontrar um intervalo $I \subset [a, b]$ que contem o zero, e um ponto x_0 tal que as condições i), ii), iii), sejam validas (veja slide 10 da Aula 10).

  Dica: Avalie as $\varphi(x)$ do tipo $\varphi(x) = x - c * f(x)$ onde c é um real tal que $|c| < 1$, $c \neq 0$.
- Escreva um código para este método do ponto fixo Verifique que obtém convergência ao zero da sucessão x_k com o x_0 determinado no item anterior. Use como critério de paragem $|f(x_k)| < 10^{-5}$.

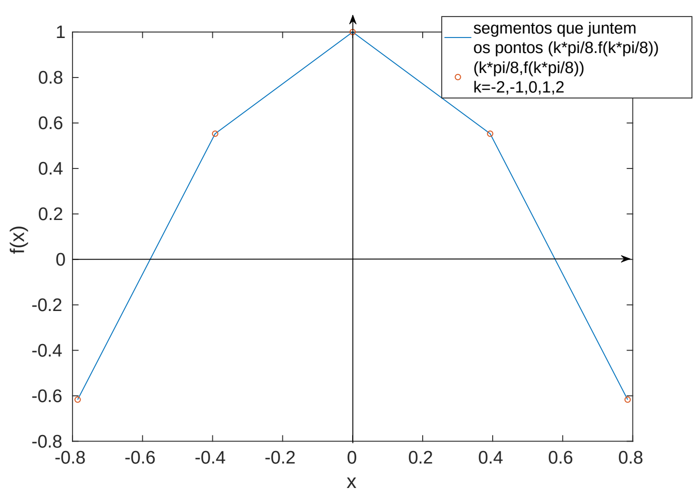
Resoluçao (7):

- Faça o gráfico desta função em $[a, b] \subset [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$, somente dando os valores da f num numero finito de pontos em $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$. **Resposta:**

Seja $f(x) = cos(2x) - x^2$, consideramos os pontos com f aproximada com 5 decimais.

x	$f(x)$
$-\frac{pi}{4}$	-0.61685
$-\frac{pi}{8}$	0.55289
0	1
$\frac{pi}{8}$	0.55289
$\frac{pi}{4}$	-0.61685

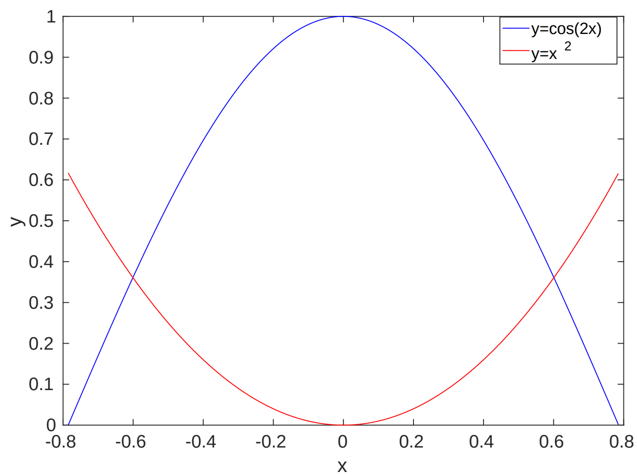
e traçamos os segmentos que juntam estes pontos para chegar a uma aproximação do gráfico de $f(x)$ em $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ como visualizado na figura abaixo.



- Quantos zeros tem a função? Verifique se os zeros da função f são simétricos respeito o eixo das y.

  Resposta:

  A função f em $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ tem dois zeros ξ_1,ξ_2 com $\xi_1 < 0$ e $\xi_2 > 0$. Isso porque notamos que $f(x) = 0 \iff \cos(2x) = x^2$ ou seja os zeros de f são as abscissas dos pontos de interseção das curvas $y = cos(2x)$ e $y = x^2$ Se traçamos o gráficos de $cos(2x)$ e x^2 observamos que são possíveis somente duas interseções



  portanto a f tem somente dois zeros em $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$, e não existem zeros afora deste intervalo.

  Agora sendo que $f(-x) = f(x)$ temos que a função f é simétrica respeito o eixo das y portanto o seu gráfico para $x > 0$ será simétrico aquele por $x < 0$. Então os dois zeros são simétricos também. Portanto $\xi_1 = -\xi_2$.

- Achar uma função $\varphi(x)$ tal que o seu ponto fixo seja zero de $f(x)$. **Resposta:**

  Uma qualquer $\varphi(x) = x + A(x)f(x)$ com $A(x)$ não nulo no zero ξ ($A(\xi) \neq 0$) de f é uma função tal que o seu ponto fixo é o zero de f. porque $\varphi(\xi) = \xi \iff f(\xi) = 0$. Por exemplo no caso da nossa $f(x)$ a função $\varphi(x) = x + e^x \cdot (cos(2x) - x^2)$ é uma candidata $\varphi(x)$ assim como $\varphi(x) = x + (x - \xi + 1) \cdot (cos(2x) - x^2)$ ou também $\varphi(x) = x + c \cdot (cos(2x) - x^2)$ com c uma constante diferente de zero.

- Verifique se esta função $\varphi(x)$ é tal que o método do ponto fixo $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ converge **a um seu zero positivo**. Ou seja pelo teorema de convergência, tem de encontrar um intervalo $I \subset [a, b]$ que contem o zero, e um ponto x_0 tal que as condições i), ii), iii), sejam validas (veja slide 10 da Aula 10).

  Dica: Avalie as $\varphi(x)$ do tipo $\varphi(x) = x - c * f(x)$ onde c é um real tal que $|c| < 1$, $c \neq 0$.

Resposta:
Consideramos como sugerido a classe das funções $\varphi(x) = x - c \cdot f(x)$ se $c \neq 0$ esta é uma candidata função do ponto fixo para a $f(x)$ com ponto fixo o zero $\xi_2 > 0$ positivo de $f(x)$. As condições i) ii) iii) do teorema de convergência do referido teorema de convergência do método do ponto fixo são no nosso caso: encontrar I que contem o zero ξ_2 e a função de ponto fixo ξ_2 tal que

i) φ e a sua derivada φ' são funções continuas em I;
ii) $\exists M > 0$ tal que $|\varphi'(x)| \leq M < 1 \ \forall x \in I$;
iii) $x_0 \in I$;

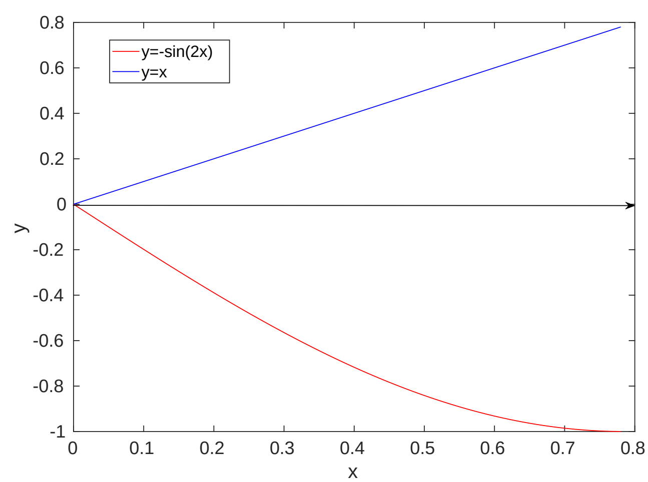
i) Observamos que $\varphi(x) = x - c(\cos(2x) - x^2)$ é continua e também a sua derivada $\varphi'(x) = 1 + 2c\sin(2x) + 2cx$ é continua num qualquer intervalo em $\mathbb{R}$
ii) Determinamos um intervalo que contem $\xi_2 > 0$ que está conteúdo em $]0, \frac{pi}{4}]$. Partimos no considerar um intervalo $I = [a, \frac{pi}{4}]$ com $a > 0$ e proximo de zero assim sabemos dos gráfico anteriores que ele contem o zero positivo (por exemplo com $a = 0.1$ $f(0.1) = 0.9701, f(\frac{\pi}{4}) = -0.6191$) e portanto o zero está em $[0.1, \frac{\pi}{4}]$) e vamos ver se conseguimos encontrar pelo menos um c para que

$$|\varphi'(x)| = |1 + 2csin(2 * x) + 2cx| < 1 \quad \text{por cada} x \in I$$

. Observamos que

$$|1 + 2c\sin(2 * x) + 2cx| < 1 \iff -2 < 2c(\sin(2x) + x) < 0.$$

Começamos usando $c > 0$:
observamos que a segunda desigualdade será satisfeita se $\sin(2x) + x < 00$ com $0 < x < \frac{\pi}{4}$, esta será satisfeita se $x < -sin(2x)$. Mas este nunca acontecerá sendo que $-sin(2x)$ é sempre negativo em $]0, \frac{\pi}{4}]$ em vez x é positivo em $]0, \frac{\pi}{4}]$, como pode ver na Figura em baixo



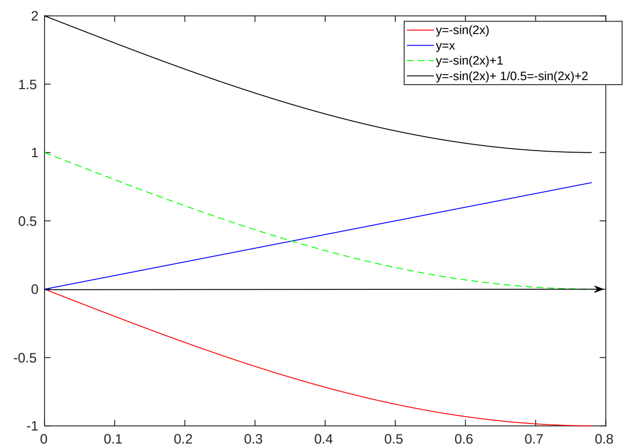
Portanto podemos considerar somente $c < 0$
Agora verificamos se condição

$$-2 < 2c(\sin(2x) + x) < 0$$

é satisfeita com $c < 0$ e $x \in [a, \frac{pi}{4}]$ com a proximo de zero. A seginda desigualdade $2c(\sin(2x) + x) < 0$ será sempre satisfeita porque $2c < 0$ e como vimos antes $x > -\sin(2x)$ portanto $x + \sin(2x) > 0$. Analisamos a primeira desigualdade $-2 < 2c(\sin(2x) + x)$ esta é satisfeita se vale que $-1 < c(x + \sin(2x))$ e sendo $c < 0$, teremos

$$-1 < c(x + \sin(2x)) \iff x + \sin(2x) < -\frac{1}{c} \iff x < -sin(2x) - \frac{1}{c}.$$

A última desigualdade diz nos que temos de encontrar um $-\frac{1}{c} = \frac{1}{|c|}$ bastante grande para que podemos obter por cada $x \in [a, \frac{pi}{4}]$ $x < -sin(2x) - \frac{1}{c} \iff x + sin(2x) < -\frac{1}{c}$, veja os gráficos em baixo.



O máximo de $x + sin(2x)$ é obtido em $\bar{x} = \frac{\pi}{4}$ onde a função toma valor $\bar{x} + \sin(2\bar{x}) = 1 + \frac{\pi}{4}$ portanto é suficiente encontrar um $c < 0$ tal que $-\frac{1}{c} = \frac{1}{|c|} > 1 + \frac{\pi}{4} = \frac{4+\pi}{4} \approx 1.7854$ ou seja toma $c < 0$ tal que $|c| < \frac{4}{4+\pi} \approx 0.5601$. **Tomamos então $c = -0.5$,** e com este teremos em fim que a $\varphi(x) = x - cf(x) = x + 0.5(\cos(2x) - x^2)$. vai satisfazer no intervalo $I = [0.1, \frac{\pi}{4}]$ a condição $|\varphi'(x)| < 1$.

iii) Escolhemos um $x_0 \in I = [0.1, \frac{\pi}{4}]$. por exemplo $x_0 = 0.2$.

A função $\varphi(x) = x + 0.5(\cos(2x) - x^2)$ é uma candidata para que o método do ponto fixo associado $x_{k+1} = \varphi(x_k)$converge ao zero positivo ξ_2 por cada $x_0 \in [0.1, \frac{\pi}{4}]$.

- Escreva um código para este método do ponto fixo Verifique que obtém convergência ao zero da sucessão x_k com o x_0 determinado no item anterior. Use como critério de paragem $|f(x_k)| < 10^{-5}$

Resposta:

Código em Matlab

```
function [xk,fk,k]= pontofixo(x0,phi,func,tol,kmax)
  k=0;
  fk=func(x0);
  while abs(fk)>tol && (k<kmax)
    k=k+1;
    xk=phi(x0);
    fk=func(xk);
    x0=xk;
  end
end
```

Usaremos na chamada da função ponto fixo os input:
x0=0.2, phi=@(x)'x+0.5(cos(2x)-xˆ2)', , func=@(x)'cos(2x)-xˆ2', tol=10^{-5}, kmax=100.
Os resultados obtidos são

k	x_k	$\lvert f(x_k)\rvert$
0	0.2	0.88106
1	0.64053	0.12458
2	0.57824	$0.68202 \cdot 10^{-1}$
3	0.61234	$0.35717 \cdot 10^{-1}$
...	...	...
15	0.6007754	$0.190280 \cdot 10^{-4}$
16	0.6007658	$0.101489 \cdot 10^{-4}$
17	0.6007709	$0.541305 \cdot 10^{-5}$

Portanto a raiz ξ_2 achada é $x_{17} \approx 0.6007709$ com 7 dígitos significativos.