MS211, Cálculo Numérico, Turma E
Primeiro Semestre de 2020, UNICAMP

Resoluçao Lista de Exercícios 6

Entrega por Google Classroom dos exercícios e itens marcados com (*) até Sábado 08/08/2020.
Os exercícios e os itens (*) podem ser desenvolvidos em grupos de até <u>três</u> membros.

(1) Peso 50% na nota final
Resolva o seguinte problema de valor inicial usando vários métodos numérico Verifique se consegue chegar a solução $y(x) = \frac{11}{4}e^{-2(x+1)} + \frac{2x-1}{4}$.

$$\begin{cases} y' = -2y + x \\ y(-1) = 2 \end{cases}$$

(a)* Achar a solução $y = y(x)$ no ponto $x = 10$, usando o método de Euler explicito com $h = 1/8$, $h = 1/16$, $h = 1/32$, $h = 1/64$, $h = 1/128$.

(b)* Verifique se com o os dados obtidos pode confirmar que o método de Euler Explicito é de primeira ordem

(c)* Repetir os dois itens anteriores usando o método de Euler implícito. Utilizando uma forma explicita similar a aquelas apresentada na aula, que se obtém para problemas lineares em y do tipo

$$\begin{cases} y' = \lambda y \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

(d)* Agora usando o método do ponto fixo em cada passo de Euler implícito, aproxima a solução do PVI em cima novamente em $x = 10$,
e usando $h = 1/8$, $h = 1/16$, $h = 1/32$, $h = 1/64$, $h = 1/128$.
Use como critério de saída no ciclo do método do ponto fixo (associado a Euler implícito) o seguinte : $|y_i^{(k+1)} - y_i^{(k)}| < 10^{-10}$

(e)* Resolve o item anterior mas usando esta vez o método de Crank Nicolson.

(f)* Usando os resultados obtidos nos dois itens anteriores pode afirmar que o método de Crank Nicolson resulta ser mais acurado a paridade de h respeito o método de Euler implícito? Era esperável que esta afirmação fosse verdadeira? Motive a suas respostas.

- Usando os dados dos itens anteriores verifique se o método de Euler implícito é de primeira ordem e se Crank Nicolson resulta ser de segunda ordem. Note que não sempre este é fácil verificar quando estamos trabalhando com valores de erro muitos pequenos. Note que o parar não ao infinito a iteração do ponto fixo com $tol = 10^{-10}$ afeta os resultados dos métodos.

Resoluçao (1):

(a) Implementamos Euler explicito $y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$, sendo que $f(x, y) = -2y + x$, o método tem a segunte expressão no passo $i + 1$

$$y_{i+1} = y_i - 2hy_i + hx_i = (1 - 2h)y_i + hx_i \tag{Ex0.0a}$$

com $x_0 = -1$, $y_0 = y(-1) = 2$, $x_i = x_0 + ih$.
Sendo que queremos achar a solução em $x = 10$, e seja n o numero inteiro de passos necessário temos que $n = \frac{10-x_0}{h} = \frac{10+1}{h} = \frac{11}{h}$ e analogamente $h = \frac{11}{n}$. Observamos que com os h sugeridos $h = \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}$ permitem de obter a aproximação de $y(10)$ em resperivamente $n = 88, 176, 352, 704, 1408$.

Podemos implementar em cada passa a expressão (Ex0.0a) e depois n passos achar a y_n e tomar este como aproximação de $y(10)$.

Outra maneira de achar y_n é dar a sua expressão direta. Este é possível porque $f(x, y)$ é linear respeito y. Notamos que $y_1 = (1-2h)y_0+hx_0$, $y_2 = (1-2h)y_1+hx_1 = (1-2h)^2y_0 + (1-2h)hx_0 + hx_1$ $y_3 = (1-2h)^3y_0 + (1-2h)^2hx_0 + (1-2h)hx_1 + hx_2$ e para um n qualquer temos então

$$y_n = (1 - 2h)^n y_0 + h\sum_{j=1}^{n-1}(1 - 2h)^j x_n + hx_{n-1} = (1 - 2h)^n y_0 + h\sum_{j=0}^{n-1}(1 - 2h)^j x_n.$$

Implementando o método obtemos usando o segundo procedimento obtemos os seguites resultados de y_n e erro $e_h = |y(x_n) - y_n|$ respeito o $y(x_n) = y(10)$ teorico: $y(10) = 4.750000000767104$

h	n	y_n	e_h	e_h/e_{2h}
$\frac{1}{8}$	88	4.750000000027842	$7.3926 \cdot 10^{-10}$	
$\frac{1}{16}$	176	4.750000000170903	$5.9620 \cdot 10^{-10}$	0.806
$\frac{1}{32}$	352	4.750000000374301	$3.9280 \cdot 10^{-10}$	0.659
$\frac{1}{64}$	704	4.750000000539973	$2.2713 \cdot 10^{-10}$	0.578
$\frac{1}{128}$	1408	4.750000000644795	$1.2231 \cdot 10^{-10}$	0.539
$\frac{1}{256}$	2816	4.750000000703603	$6.3501 \cdot 10^{-11}$	0.519

Os resultados são esperados ser muitos similares usando o primeiro procedimento. A diferença nos resultados será devida somente aos erros de arredondamento.

(b) Notamos da tabela anterior que para h pequeno ($h = \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \frac{1}{256}$) temos que

$$e_h \approx 0.5e_{2h}$$

portanto $\frac{e_h}{e_{2h}} \approx 0.5 \iff e_h = Ch$ com C independente de h, e então provamos que o método de Euler explicito escala linearmente com ordem 1.

(c) Forma explícita de Euler implícito:
Um passo de Euler implícito neste problema determina y_{i+1} com a seguinte formula

$y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1}) = y_i - 2hy_{i+1} + hx_{i+1}$. Sendo que f é linear respeito y podemos isolar os termos que multiplicam y_{i+1} obtendo $(1+2h)y_{i+1} = y_i + hx_{i+1}$ e então $y_{i+1} = \frac{y_i + hx_{i+1}}{1+2h}$. Daqui obteremos

$$y_1 = \frac{y_0 + hx_1}{1+2h} = \frac{y_0}{1+2h} + \frac{hx_1}{1+2h}$$

$$y_2 = \frac{y_1}{1+2h} + \frac{hx_2}{1+2h} = \frac{y_0}{(1+2h)^2} + \frac{hx_1}{(1+2h)^2} + \frac{hx_2}{1+2h}$$

$$y_3 = \frac{y_0}{(1+2h)^3} + \frac{hx_1}{(1+2h)^3} + \frac{hx_2}{(1+2h)^2} + \frac{hx_3}{1+2h}$$

A forma explicita do passo n será então

$$y_n = \frac{y_0}{(1+2h)^n} + \sum_{i=1}^{n} \frac{hx_i}{(1+2h)^{n-i+1}}$$

Implementando o método obtemos usando os seguites resultados de y_n e erro $e_h = |y(x_n) - y_n|$ respeito o $y(x_n) = y(10)$ teorico: $y(10) = 4.750000000767104$

h	n	y_n	e_h	e_h/e_{2h}
$\frac{1}{8}$	88	4.750000008151764	$7.3847 \cdot 10^{-9}$	
$\frac{1}{16}$	176	4.750000002732051	$1.9649 \cdot 10^{-9}$	0.266
$\frac{1}{32}$	352	4.750000001484384	$7.1728 \cdot 10^{-10}$	0.365
$\frac{1}{64}$	704	4.750000001074244	$3.0714 \cdot 10^{-10}$	0.428
$\frac{1}{128}$	1408	4.750000000909346	$1.4224 \cdot 10^{-10}$	0.463
$\frac{1}{256}$	2816	4.750000000835573	$6.8469 \cdot 10^{-11}$	0.481

Observamos que $\frac{e_h}{e_{2h}} \approx 0.5$ para h que tende a zero, então como antes o método escala linearmente respeirto h portanto é provado que Euler implícito é de primeira ordem.

(d) Euler implícito resolvido com método do ponto fixo:

Cada passo do método de Euler implicito em geral pode ser resolvido atraves um problema do ponto fixo: $y_{i+1} = \Phi(y_{i+1}) = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1})$.
No nosso caso usaremos a seguinte função no passo $i+1$ de Euler implícito
$\Phi_{i+1}(y) = y_i - 2hy + hx_{i+1}$.
Note que esta função $\Phi_{i+1}(y)$ muda em cada passo $i+1$ e depende de h.

No passo $i+1$ de Euler implicito temos de implementar o seguinte método do ponto fixo

$$y_{i+1}^{(k+1)} = \Phi_{i+1}(y_{i+1}^{(k)})$$

Sabemos que se este método do ponto fixo convergir então convergirá necessariamente ao valor y_{i+1} do método de Euler implicito, ou seja $\lim_{k\to\infty} y_{i+1}^{(k)} = y_{i+1}$.

Para ter convergência temos de partir de uma aproximação $y_{i+1}^{(0)}$ de y_{i+1} que pertence a um intervalo I que contem y_{i+1} e tal que

$$|\Phi'_{i+1}(y)| < 1 \quad \forall y \in I.$$

Observamos que para cada $y \in \mathbb{R}$ $\Phi'_{i+1}(y) = -2h$ e portanto

$$|\Phi'_{i+1}(y)| < 1 \iff 2h < 1 \iff h < \frac{1}{2}$$

Portanto podemos pegar $I = \mathbb{R}$, e então para cada $y_{i+1}^{(0)} \in \mathbb{R}$ e usando $h < \frac{1}{2}$ teremos que o método do ponto fixo converge.

Aplicamos então em cada um dos $n = \frac{11}{h}$ passos o método do pontos fixo para obter os y_{i+1}. Usaremo cmo controle para sair das iterações do ponto fixo a condição $|y_{i+1}^{(k+1)} - y_{i+1}^{(k)}| < 10^{-10}$ e tomaremos $y_{i+1}^{(k+1)}$ como y_{i+1}. Em cada passo $i+1$ usaremos $y_{i+1}^{(0)} = y_i$ onde y_i é o valor obtido no passo i de euler implicito (após aplicar o associado método do ponto fixo). Obtemos os seguintes resultados:

h	n	y_n	e_h	e_h/e_{2h}
$\frac{1}{8}$	88	4.750000008079004	$7.3119 \cdot 10^{-9}$	
$\frac{1}{16}$	176	4.750000002764791	$1.9977 \cdot 10^{-9}$	0.0.273
$\frac{1}{32}$	352	4.750000001422538	$6.5543 \cdot 10^{-10}$	0.328
$\frac{1}{64}$	704	4.750000001081751	$3.1465 \cdot 10^{-10}$	0.480
$\frac{1}{128}$	1408	4.750000000905653	$1.3855 \cdot 10^{-10}$	0.440
$\frac{1}{256}$	2816	4.750000000842904	$7.5800 \cdot 10^{-11}$	0.547

Notamos que a $\frac{e_h}{e_{2h}}$ oscila ao lado de 0.5 quando h é pequeno, portanto podemos intuir que o método tem um erro que escala linearmente com h , confirmando que o método é de ordem 1. Era esperavel ter resultados um pouco pior de usar Euler implicito na forma explicita sendo que com o método do ponto fixo não achamos exatamente os y_{i+1} mas suas aproximações $y_{i+1}^{(k)}$.

(e) (Crank-Nicolson na forma implicita)

Cada passo do método de Crank-Nicolson em geral pode ser resolvido atraves um problema do ponto fixo: $y_{i+1} = \Phi(y_{i+1}) = y_i + \frac{h}{2}(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}))$.
No nosso caso usaremos a seguinte função no passo $i+1$ de Crank-Nicolson $\Phi_{i+1}(y) = y_i + \frac{h}{2}(-2y_i + x_i - 2y + x_{i+1})$. Note que esta função $\Phi_{i+1}(y)$ muda em cada passo $i+1$ e depende de h.
No passo $i+1$ de Crank-Nicolson temos de implementar o seguinte método do ponto fixo

$$y_{i+1}^{(k+1)} = \Phi_{i+1}(y_{i+1}^{(k)})$$

Sabemos que se este método do ponto fixo convergir então convergirá necessariamente ao valor y_{i+1} do método de Crank-Nicolson.

Para ter convergência temos de partir de uma aproximação $y_{i+1}^{(0)}$ de y_{i+1} que pertence a um intervalo I que contem y_{i+1} e tal que

$$|\Phi'_{i+1}(y)| < 1 \quad \forall y \in I.$$

Observamos que para cada $y \in \mathbb{R}$ $\Phi'_{i+1}(y) = -h$ e portanto

$$|\Phi'_{i+1}(y)| < 1 \iff h < 1$$

Portanto podemos pegar $I = \mathbb{R}$, e então para cada $y_{i+1}^{(0)} \in \mathbb{R}$ e usando $h < 1$ teremos que o método do ponto fixo converge. Note que podems pegar um h então maior daquele para ter convergência com Euler Implicito ($h < \frac{1}{2}$) esta é uma vantagem de ste método. Além disso sabemos que a paridade de h Crank-Nicolson tem de ser mais acurado sendo que é um método de seunda ordem $e_n \approx Ch^2$.

Aplicamos em cada um dos $n = \frac{11}{h}$ passos o método do pontos fixo para obter os y_{i+1} com $h < 1$. Usaremo cmo controle para sair das iterações do ponto fixo a condição $|y_{i+1}^{(k+1)} - y_{i+1}^{(k)}| < 10^{-10}$ e tomaremos $y_{i+1}^{(k+1)}$ como y_{i+1}. Em cada passo $i+1$ usaremos $y_{i+1}^{(0)} = y_i$ onde y_i é o valor obtido no passo i de euler implicito (após aplicar o associado método do ponto fixo). Obtemos os seguintes resultados:

h	n	y_n	e_h	e_h/e_{2h}
$\frac{1}{4}$	44	4.750000000494608	$2.7250 \cdot 10^{-10}$	
$\frac{1}{8}$	88	4.750000000716055	$5.1049 \cdot 10^{-11}$	0.187
$\frac{1}{16}$	176	4.750000000749257	$1.7847 \cdot 10^{-11}$	0.350
$\frac{1}{32}$	352	4.750000000769129	$2.0250 \cdot 10^{-12}$	0.113
$\frac{1}{64}$	704	4.750000000762037	$5.0671 \cdot 10^{-12}$	2.50
$\frac{1}{128}$	1408	4.750000000774095	$6.9909 \cdot 10^{-12}$	1.380
$\frac{1}{256}$	2816	4.750000000767248	$1.4338 \cdot 10^{-13}$	0.0205

Nesta aplicação de Crank-Nicolson não conseguimos achar que ordem é dois, se bem com os h maiores temos que $\frac{e_h}{e_{2h}}$ estava menor de 0.5 mas não perto suficiente a $\frac{1}{4} = 0.25$ que era o valor para confirmar que o método for de ordem 2. Lembre que se um método for de ordem 2 então $e_h \approx Ch^2$ para h suff. pequeno e então era esperavel que $\frac{e_h}{e_{2h}} \approx \frac{h^2}{4h^2} = \frac{1}{4} = 0.25$.
Não conseguimos provar a ordem porque os erros são demais pequenos (menores de 10^{-10}) e a tolerância usada no método era 10^{-10} assim o mesmo y_{i+1} pode ser inacurado de 10^{-10} por isso resulta dificil comparar os erros. Além disso quando estamos tratando de valore muito pequenos os erros de arredondamento terão um efeito relativamente grande nos calculos finais.

(e) Porém as observações feitas no item anterior notamos que o método de Crank-Nicolson dá a paridade de h aproximações de $y(10)$ melhores de Euler implicito. Note que na coluna dos erros de Crank-Nicolson que obtem erros menores respeitos a aqueles obtidos com as mesmas h de Euler implícitos e explícito.
Isso era esperado porque o método de Crak-Nicolson é de segunda ordem e então $e_{CK,h} \approx C_1 h^2$ para h pequeno em vez $e_{EI,h} \approx C_2 h$ e então se h for pequeno , pode tomar por exemplo $h < \frac{1}{2}$ assim ambos os métodos do pontos fixo convergem, vai ter que $h^2 < h$ e portanto $e_{CK,h} < e_{EI,h}$ com h suficientemente pequeno.

(2) Peso 25% na nota final
Considere a seguinte equação diferencial não linear (PVI não linear)

$$\begin{cases} y' = \cos(y + x) \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

(a)* achar o valor da solução $y(x)$ da PVI em cima no ponto $\bar{x} = 10$ usando Euler aperfeiçoado, e diferentes tamanhos de passo: $h = 1$, $h = 1/2$, $h = 1/4$, $h = 1/10$.

(b)* Indicado com e_0 o erro feito com $h = 1$ em que relação encontram-se os erros e_i (associado a $h = \frac{1}{2^i}$) respeito ao erro e_0? E o erro $e_{\frac{1}{10}}$ obtido com $h = \frac{1}{10}$ pode ser deduzido do erro e_0?

(c)* Sabendo que o erro $e_0 = 1.1672 \cdot 10^{-2}$ É possível encontrar um $h = 1/2^k$ tal que o erro associado e_k seja menor de um dado $\varepsilon > 0$? Se sim, encontre k tal que $|e_k| < 10^{-9}$

(d) Sabendo que o método de Euler aperfeiçoado tem o erro de truncamento
$T_h = h^3 \left(\frac{y'''}{6} - \frac{1}{8}(f_{xx} - 2ff_y + f^2 f_{yy}) \right)$
e que no nosso problema o erro global satisfaz

$$|e_h(\bar{x})| \le \frac{T_h}{h}(e^{(\bar{x} - x_0)} - 1)$$

estimar o erro associado a cada uma aproximações obtidas no item a.

Resoluçao (2):

(a) Neste exemplo temos como ponto inicial $x_0 = 1$ com $y_0 = 0$. PAra poder achar uma aproximação da solução do PVI em $\bar{x} = 10$ precisaremos efetuar com Euler aperfeiçõado um numero n de passos que dependem do tamanho h escolhido. Vale a relação $n = \frac{\bar{x}-x_0}{h} = \frac{10-1}{h} = \frac{9}{h}$. Com $h = 1, 1/2, 1/4, 1/10$ temos de fazer respectivamente $n = 9, 18, 36, 90$ passos para chegar a $x = 10$ partindo de $x_0 = 1$.

O método de Euler aperfeiçõado é um método explicito de segunda ordem e portanto independemente se f é linear ou menos conseguimos implementar cada passo exatamente sem necessidade de resolver equações e então de usar métodos do ponto fixo.
Cada passo y_{i+1} de Euler aperfeiçõado satisfaz a formula $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_i + hf(x_i, y_i)))$ sendo que no nosso PVI $f(x, y) = cos(y+x)$ temos a seguinte formula explicita

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left(\cos(y_i + x_i) + \cos(y_i + h\cos(y_i + x_i) + x_{i+1})\right).$$

Implementando esta formula nos n passos obtemos os seguintes resultados.

h	n	y_n
1	9	-7.078821922934692
$\frac{1}{2}$	18	-7.069772551642987
$\frac{1}{4}$	36	-7.067730004178916
$\frac{1}{10}$	90	-7.067236918450305

Note não visualizamos o erro porque desconhecemos a solução teorica do problema.

(b) Sabemos que o método de Euler aerfeiçõado é de segunda ordem portnto quando h for suficientemente pequeno teremos $e_h \approx Ch^2$ com C independente de h. Se indicamos com e_0 o erro para $h = 1$ $e_0 = e_{h=1}$ teremos que $e_0 = e_{h=1} = C$ Assim se temos o erro e_h com h qualquer então

$$e_h \approx e_0 h^2 \tag{Ex0.0b}$$

então posto $e_i := e_{h=\frac{1}{2^i}}$ teremos

$$e_i \approx C\left(\frac{1}{2^i}\right)^2 = e_0\left(\frac{1}{2^i}\right)^2 = e_0\frac{1}{2^{2i}} = \frac{e_0}{4^i}$$

Usando (Ex0.0b) com $h = \frac{1}{10}$ teremos

$$e_{h=\frac{1}{10}} \approx e_0\frac{1}{10^2} = \frac{e_0}{100}.$$

(d) A resposta é sim; conehcendo e_0 é possível encontrar k tal que $e_k := e_{h=\frac{1}{2^k}}$ seja tal que $e_k < \varepsilon$. Usando o resultado do item anterior temos que $e_k \approx \dfrac{e_0}{(2^k)^2} = \dfrac{e_0}{4^k}$ e então é suficiente encontrar um k tal que

$$\frac{e_0}{4^k} < \epsilon.$$

Note que esta desigualdade é equivalente a encontrar k tal que $4^k > \frac{e_0}{\epsilon}$ ouseja tal que

$$k > \frac{\log(e_0) - \log(\varepsilon)}{\log(4)}$$

com o logartimo $\log(\cdot)$ numa base qualquer. Se usassemos $e_0 = 1.1672 \cdot 10^{-2}$ e $\varepsilon = 10^{-9}$ teremos de pegar um k inteiro tal que

$$k > \frac{\log_{10}(1.1672) - 2 + 9}{\log_{10}(4)} = \frac{\log_{10}(1.1672) + 7}{\log_{10}(4)} \approx 11.7382$$

Portanto será suficiente tomar $k = 12$ para ter $e_k < 10^{-9}$. Note que usamos neste exercicio $e_k = |y(\bar{x}) - y_n|$ portanto teremos sempre $e_k = |e_k|$.

(3) (*) Peso 25% na nota final Considere o seguinte PVC

$$\begin{cases} y'' = y' + 2y + x \\ y(-1) = 2 \\ y(2) = 3 \end{cases}$$

Achar uma aproximação da solução em $x = 1$, usando um método de diferenças finitas de segunda ordem para vários espaçamentos: $h = 1/2$, $h = 1/4$, $h = 1/10$.
Comparar os resultados obtidos e dizer de quanto o erro diminui com estes h respeito o erro e_0 obtido do método se usássemos $h = 1$.

Resoluçao (3):

Este problema de contorno é associado a equação diferencial $y'' = y' + 2y + x$ num dominio $[x_0, x_n] := [-1, 2]$ e com valores no contorno $y_0 = y(-1) = 2$ e $y_n = y(2) = 3$. Sabemos que se distanciamos os pontos x_i no intervalo $[-1, 2]$ com um espaçamento fixo h , então teremos $x_i = x_0 + h$, $x_n = x_0 + nh$ portanto obtemos $n + 1$ pontos $x_0 = -1, x_1 \ldots, x_n$ equidistantes em $[x_0, x_n]$ com $n = \frac{x_n - x_0}{h} = \frac{3}{h}$ inteiro. No nosso problema então associados aos espaçãmentos $h = \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{10}$ teremos $n = 6,\ 12,\ 30$ respetivamente.

Queremos determinar uma aproximação de $y(x)$ no ponto $\bar{x} = 1$. Vamos ver se $\bar{x}$ é um ponto da malha $\{x_i\}_{i=0,\ldots,n}$ construida antes com espaçamento h. Se acontecer isso tem de existir um $\bar{n}$ tal que $\bar{x} = x_{\bar{n}} = x_0 + \bar{n}h$, então temos necessariemte ter um $\bar{n} = \frac{\bar{x} - x_0}{h} = \frac{1+1}{h} = \frac{2}{h}$ inteiro. Para $h = \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{10}$ obtemos respetivamente $\bar{n} = 4,\ 8,\ 20$, então teremos determinar

$$\begin{aligned} &y_4 \text{ no caso } h = \tfrac{1}{2} \\ &y_8 \text{ no caso } h = \tfrac{1}{4} \\ &y_{20} \text{ no caso } h = \tfrac{1}{10} \end{aligned}$$

Para determinar estes $y_{\bar{n}}$ usamos um método de diferenças finitas de segunda ordem aplicado a equação diferencial do problema. Aproximamos com as seguintes formulas centradas de segunda ordem as derivadas:

$$y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} \quad y''(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2}$$

então o método aplicado a equação diferencial nos pontos interiores $x_i = x_0 + ih$ com $i = 1, \ldots, n-1$ é

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} - \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} - 2y_i - x_i = 0$$

Multiplicando por h^2

$$y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} - h\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2} - 2h^2 y_i - h^2 x_i = 0$$

e ragrupando os termos y_i, y_{i-1}, y_{i+1} obtemos

$$(1 + \frac{h}{2})y_{i-1} - 2(1 + h^2)y_i + (1 - \frac{h}{2})y_{i+1} = h^2 x_i \quad \text{para cada } i = 1, \ldots, n-1$$

Em particular associado a $i = 1$, sendo que conhecemos $y_0 = 2$ obtemos a equação

$$-2(1 + h^2)y_1 + (1 - \frac{h}{2})y_2 = h^2 x_1 - (1 + \frac{h}{2})y_0 = h^2 x_1 - 2(1 + \frac{h}{2})$$

e com $i = n-1$ obtemos

$$(1 + \frac{h}{2})y_{n-2} - 2(1 + h^2)y_{n-1} = h^2 x_{n-1} - (1 - \frac{h}{2})y_n = h^2 x_{n-1} - 3(1 - \frac{h}{2})$$

Então obtemos o seguinte sistema linear de dimensão $n-1$ no formato matricial

$$Ay_h = b \tag{Ex0.0c}$$

com

$$A = \begin{pmatrix} -2(1+h^2) & 1-\frac{h}{2} & & & & \\ 1+\frac{h}{2} & -2(1+h^2) & 1-\frac{h}{2} & & & \\ & 1+\frac{h}{2} & -2(1+h^2) & 1-\frac{h}{2} & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1+\frac{h}{2} & -2(1+h^2) & 1-\frac{h}{2} \\ & & & & 1+\frac{h}{2} & -2(1+h^2) \end{pmatrix}$$

e

$$y_h = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} h^2 x_1 - 2(1+\frac{h}{2}) \\ h^2 x_2 \\ \vdots \\ h^2 x_{n-2} \\ h^2 x_{n-1} - 3(1+\frac{h}{2}) \end{pmatrix}$$

Este sistema tridiagonal pode ser resolvido eficientemente com o algoritmo de Thomas. Mas agora, vamos verificar se podemos resolver este sistema com o método iterátivo de Gauss-Seidel ou Jacobi. Verificamos se a matriz satisfaz o criterio das linhas estrito. Observamos que com $h \leq 2$

$$|a_{ii}| = 2(1+h^2), \quad |a_{i,\ i-1}| + |a_{i,\ i+1}| = |1+\frac{h}{2}| + |1-\frac{h}{2}| = 1+\frac{h}{2}+1-\frac{h}{2} = 2$$

então temos que $|a_{ii}| > |a_{i,\ i-1}| + |a_{i,\ i+1}|$ e portanto a matriz triadiagonal satisfaz estritamente o criterio das linhas e portanto o método de Gauss Seidel e de Jacocobi convergem por um qualquer $y_h^{(0)} \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Aplicamos Gauss-Seidel ao sistema $Ay_h = b$ descrito antes, partindo de um vetor $y_h^{(0)} = y_i^{(0)}$

que toma os valores $y_i^{(0)} = r(x_i)$ com $i = 1 \ldots, n-1$onde $r(x) = \frac{1}{3}(x+1)+2$ é a função que descreve a reta que passa pelos pontos $(x_0, y_0) = (-1, 2)$ e $(x_n, y_n) = (2, 3)$. Esta escolha permite de acelerar o método de Gauss-Seidel.

Como critérios de sucesso do método de Gauss-Seidel consideramos estes dois contemporaneamente:

$$\|y_h^{(k)} - y_h^{(k-1)}\|_\infty < 10^{-9} \text{ e } res_k = \|b - Ay_h^{(k)}\|_\infty < 10^{-9}$$

Na saida do método visualizamos, veja a seguinte tabela, o valor $y_{\bar{n}} \approx y(1)$ obtido

h	$\bar{n}$	$y_{\bar{n}}$	k iterações de Gauss-Seidel	residuo res_k
$\frac{1}{2}$	4	0.4225	28	4.9418e-10
$\frac{1}{4}$	8	0.4185	98	7.6527e-10
$\frac{1}{10}$	20	0.4173	545	9.3168e-10
$\frac{1}{20}$	40	0.4171	2010	9.7281e-10
$\frac{1}{40}$	80	0.4171	7380	9.8612e-10

Notamos que os valores obtidos $y_{\bar{n}}$ aproximações de $y(1)$ convergem para h que tende a zero ao valor 0.4171 que então muito provavelmente será a menos de arredondamentos o valor exato $y(1)$. Menor é h maior será a dimensão do sistema e mais custos iterações Gauss-Seidel necessita para encontrar tal aproximação. Se ticessemos o erro $e_0 = |y(1) - y_{\bar{n}}|$ associado a $h = 1$, sendo que o método é de segunda ordem então $e_0 \approx Ch^2 = C$ para h suficientemente pequeno $(h \to 0)$. Então se usassemos um h qualquer teremos

$$e_h \approx Ch^2 \approx e_0 h^2$$

portanto esta é a relação que permite de determinar como e_h diminue ao variar de h respeito e_0.