Gabarito Lista de Exercícios 5

MS211, Cálculo Numérico, Turma E. Primeiro Semestre de 2020, UNICAMP

———————————

August 23, 2020

4. - Resolva o seguinte sistema linear com e depois sem pivotamento na aritmética com 4 dígitos significativos e com arredondamento $FP(10,4,1,A)$

$$\begin{cases} 10^{-6}x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - 40x_2 + 10^2 x_3 = 4 \cdot 10^6 - 220 \\ -4x_1 + 10^6 x_2 = -7.5 \cdot 10^6 \end{cases}$$

   - Compare as soluções obtidas.
   - Porque era esperado que o método de pivotamento parcial dava uma solução mais acurada.

Note que a solução exata do sistema é $(2 \cdot 10^6, 0.5, -2)$. Pode utilizar um código para implementar o método com ou/e sem pivotamento, mas não é obrigatório. Mas é importante que imprimas os valores dos coeficientes das matrizes $A^{(k)}$ e $b^{(k)}$ obtidos, além da solução.

Resposta:

(a) Escrevendo os valores em $FP(10,4,1,A)$ o Método de Gauss sem pivotamento é:

$$(A^{(1)}|b^{(1)}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0.1 \cdot 10^{-5} & 0.2 \cdot 10^1 & 0.1 \cdot 10^1 & 0.1 \cdot 10^1 \\ 0 & -0.4 \cdot 10^7 & -0.2 \cdot 10^7 & 0.2 \cdot 10^7 \\ 0 & 0.9 \cdot 10^7 & 0.4 \cdot 10^7 & -0.35 \cdot 10^7 \end{array}\right),$$

$$(A^{(2)}|b^{(2)}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0.1 \cdot 10^{-5} & 0.2 \cdot 10^1 & 0.1 \cdot 10^1 & 0.1 \cdot 10^1 \\ 0 & -0.4 \cdot 10^7 & -0.2 \cdot 10^7 & 0.2 \cdot 10^7 \\ 0 & 0 & -0.5 \cdot 10^6 & 0.1 \cdot 10^7 \end{array}\right).$$

Assim, a solução do sistema é $(2 \cdot 10^6, 0.5, -2) = (0.2 \cdot 10^7, 0.5, -0.2 \cdot 10^1)$.

(b) Método de Gauss com pivoteamento

$$(A^{(1)}|b^{(1)}) = \left(\begin{array}{ccc|c} -0.4\cdot 10^1 & 0.1\cdot 10^7 & 0 & -0.75\cdot 10^7 \\ 0 & 0.5\cdot 10^6 & 0.1\cdot 10^3 & 0.25\cdot 10^6 \\ 0 & 0.225\cdot 10^1 & 0.1\cdot 10^1 & -0.875\cdot 10^0 \end{array}\right),$$

$$(A^{(2)}|b^{(2)}) = \left(\begin{array}{ccc|c} -0.4\cdot 10^1 & 0.1\cdot 10^7 & 0 & -0.75\cdot 10^7 \\ 0 & 0.5\cdot 10^6 & 0.1\cdot 10^3 & 0.25\cdot 10^6 \\ 0 & 0 & +0.9996\cdot 10^0 & -0.2\cdot 10^1 \end{array}\right).$$

Então a solução do sistema é

$$(2\cdot 10^6, 0.5004\cdot 10^0, -2.001\cdot 10^0) = (0.2\cdot 10^7, 0.5004, -0.2001\cdot 10^1).$$

Comparando as duas soluções obtemos que a solução obtida pelo método sem pivotamento dá o resultado exato, enquanto o com pivotamento teve uma pequena diferença.

Esperamos que o método com pivotamento parcial dá uma solução mais acurada por que o cálculo do termo m_{ik} pode ter grandes erros quando há um valor próximo a zero na diagonal da matriz A, usando o pivotamento conseguimos evitar a divisão por um termo muito pequeno.

9
- Escreve os algoritmos e depois os códigos do método de Jacobi e do método de Gauss Seidel para resolver sistemas lineares dados de dimensão n qualquer.
- Verifique se e qual dos seguintes sistemas podem convergir usando o método de Jacobi e/ou o método de Gauss Seidel.

$$\begin{cases} 13x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 2 \\ 4x_1 - 13x_2 - 8x_3 = 0 \\ 5x_1 + 7x_2 - 12x_3 = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 4 \\ 4x_1 - 12x_2 - x_3 = 0 \\ 10x_1 + 7x_2 - 3x_3 = -2 \end{cases}$$

No caso de convergência implemente o método e acha a aproximação $x^{(k)}$ da solução que seja tal que $\left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|_\infty < 10^{-1}$ e com o resíduo $\left\|b - Ax^{(k)}\right\|_\infty < 10^{-2}$.

Resposta:

- Vamos analisar a matrix do primeiro sistema dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 13 & 3 & -6 \\ 4 & -13 & -8 \\ 5 & 7 & -12 \end{pmatrix}.$$

- **Método de Jacobi:** Criterio de convergencia (critério das linhas):
  Verificamos se a diagonal de A é dominante por linhas:

  $$13 > 3 + |-6|\,, \quad |-13| > 4 + |-8|\,, \quad |-12| = 5 + 7$$

  A matriz não está com diagonal estritamente dominante por linhas, mas a matriz satisfaz o critério das linhas fraco e tem todos os termos $a_{ij} \neq 0$ portanto sendo também que o seu determinante diferente de zero, podemos concluir que o método de Jacobi converge para esse sistema.
  Resultados numéricos: Após $k = 9$ iteraçeõs com $x^{(0)} = (0,\ 0,\ 0)^t$ obtemos (resultados aproximados no fim com 6 digitos decimais)

  $$x_J^{(9)} = (0.282551,\ -0.065239,\ 0.246902)^t$$

  com $\|x_J^{(9)} - x_J^{(8)}\|_\infty = 0.0014355$, $\|b - Ax_J^{(9)}\|_\infty = 0.006739$
- **Método de Gauss Seidel:** Criterio de convergencia: O mesmo critério de convergência obtido parao método de Jacobi se aplica também se para Gauss-Seidel, portanto o método de Gauss-Seidel converge para esse sistema.

  Resultados numéricos: Após $k = 6$ iterações com $x^{(0)} = (0,\ 0,\ 0)^t$ obtemos (resultados aproximados no fim com 6 digitos decimais)

  $$x_{GS}^{(6)} = (0.282626,\ -0.065065,\ 0.246472)^t$$

  com $\|x_{GS}^{(6)} - x_{GS}^{(5)}\|_\infty = 0.001108$, $\|b - Ax_{GS}^{(6)}\|_\infty = 0.006739$

- Vamos analisar a matrix do segundo sistema sistema dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -6 \\ 4 & -12 & -1 \\ 10 & 7 & -3 \end{pmatrix}.$$

- **Método de Jacobi:** Criterio de convergencia (critério das linhas):
  Vamos verificar se a diagonal de A é dominante:

  $$3 \not> 3 + |-6|\,, \quad |-12| > 4 + |-1|\,, \quad |-3| \not> 10 + 7.$$

  Vemos que matriz A não possui diagonal dominante por linhas, e portanto não converge para Jacobi. Porém, pode ser que trocando as equacões o critério seja satisfeito e portanto o método de Jacobi convergirá após a troca e vamos fazer uma trocar entre a primeira linha e a terceira linhas para obter então uma nova matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & -3 \\ 4 & -12 & -1 \\ 3 & 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

Verificando a diagonal do novo sistema, temos:

$$10 = 7 + |-3|\,, \quad |-12| > 4 + |-1|\,, \quad |-6| = 3 + 3.$$

A nova matriz não está com diagonal estritamente dominante por linhas, mas a matriz satisfaz o critério das linhas fraco e tem todos os termos $a_{ij} \neq 0$ portanto sendo também que o seu determinante diferente de zero, podemos concluir que o método de Jacobie de Gauss-Seidel convergem para esse sistema.
Resultados numéricos de Jacobi: Após $k = 8$ iteraçeōs com $x^{(0)} = (0,\ 0,\ 0)^t$ obtemos (resultados aproximados no fim com 6 digitos decimais)

$$x_J^{(8)} = (-0.427329,\ -0.066020,\ -0.913559)^t$$

com $\|x_J^{(8)} - x_J^{(7)}\|_\infty = 0.00110658$, $\|b - Ax_J^{(8)}\|_\infty = 0.005247$

- **Método de Gauss-Seidel:**
  Resultados numéricos de Gauss Seidel: Após $k = 4$ iterações com $x^{(0)} = (0,\ 0,\ 0)^t$ obtemos (resultados aproximados no fim com 6 digitos decimais)

$$x_{GS}^{(4)} = (-0.426978,\ -0.066324,\ -0.913297)^t$$

com $\|x_{GS}^{(4)} - x_{GS}^{(3)}\|_\infty = 0.003$, $\|b - Ax_{GS}^{(4)}\|_\infty = 0.0062856$

10. Considere o seguinte sistema não linear

$$\begin{cases} x_2 - x_1^2 = 0 \\ \\ (x_1 - 1)^2 + x_2^2 = 2 \end{cases}$$

- escreva este sistema da forma $F(x) = 0$. Determina a jacobiana de F em x.
- Quantas soluções tem este problema? Motive a sua resposta.
- Escreva um código para o método de Newton aplicado a este problema.
- O método de Newton pode convergir para as soluções deste sistema? Motive a sua resposta.
- Determine com o método de Newton uma aproximação $x^{(k)}$ da solução $x = (x_1, x_2)$ com x_1 maior. A aproximação procurada tem de ser tal que $\left\|F(x^{(k)})\right\|_\infty < 0.05$

Resposta:

- O sistema da forma $F(x) = 0$;

$$F(x) = \begin{pmatrix} -x_1^2 + x_2 \\ (x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 2 \end{pmatrix}.$$

Jacobina de F em x:

$$J(x) = \begin{pmatrix} -2x_1 & 1 \\ 2(x_1 - 1) & 2x_2 \end{pmatrix}.$$

- Uma maneira de achar quantas soluções o sistema tem, é fazendo o gráfifo dos pontos (x_1, x_2) que satisfazem $f_i(x_1, x_2) = 0$ para $i = 1, 2$ e ver quantas itersecçoes existem. Este problema tem duas soluções dadas por (-0.40467, 0.16378) e (1.1843, 1.40217) (Ver figura 1).

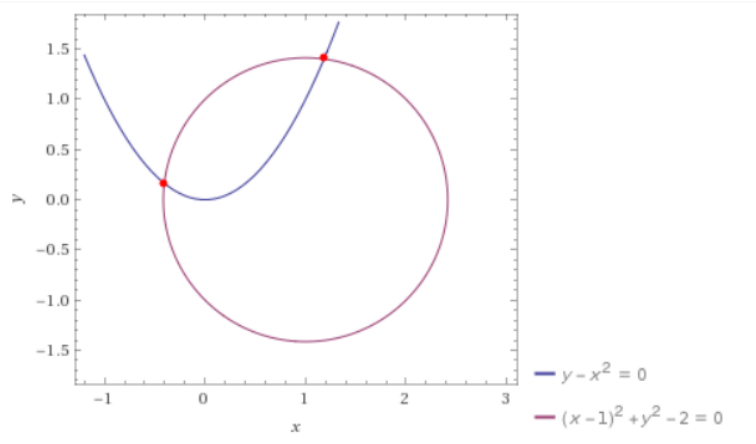

Figure 1: Intersecções das funçoes $f_1(x_1, x_2) = x_2 - x_1^2$ e $f_2(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 2$.

- Lembramos o teorema de convergência do método de Newton para sistemas não lineares escrito na pagina 21 , slide Aula 16.

  Teorema 0.1 (de Convergência do método de Newton) *Seja $F : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ a função que descreve o sistema não linear $F(x) = 0$ e seja $\Omega_0 \subset D$ tal que*

  - *Ω_0 contem um único zero x de F, ou seja contem uma única solução do sistema.*
  - *F é diferenciável em Ω_0, ou seja existem todas as derivadas de F e são continuas em Ω.*
  - *$det(J_F(x)) \neq 0$, ou analogamente existe $\beta > 0$ tal que $\|J_F(x)^{-1}\| < \beta$ onde x é o zero procurado*
  - *A matriz jacobiana $J_F(y)$ satisfaz a condição de Lipschitz em Ω_0: existe $\gamma > 0$ tal que por cada $y, z \in \Omega_0$ temos $\|J_F(y) - J_F(z)\| \leq \gamma \|y - z\|$*

  então se $x^{(0)} \in \Omega_0$ temos que cada $x^{(k)}$ estará em Ω_0 e temos a convergência do método de Newton ao zero x procurado: $\lim\limits_{k \to \infty} x^{(k)} = x$.

  - Determinamos uma boa região Ω_0 que contém um só zero e tal que $\det J_F(x)$ é diferente de zero em todo Ω_0 e na sua fronteira.

Observamos que se partimos de $x^{(0)}$ queremos achar o zero positivo Calculando o determinante da Jacobiana obtemos

$$\det(J(x)) = 4x_1x_2 - 2x_1 + 2$$

como que queremos que esse determinante diferente de zero, para poder achar a solução do sistema linear em cada passo de Newton, portanto temos tomar (x_1, x_2) ponto inicial do método tais que $x_2 \neq \frac{1}{2} - \frac{1}{2x_1}$.
A curva $\Gamma = \{(x_1, x_2) | x_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2x_1},\ x_1 > 0\}$ é donde queremos estar longe para procurar a raiz com $x_1 > 0$, porque nesta curva o sistema linear com a Jacobiana não vai ter solução.
Notamos que esta curva toma como maximo x_2 o valor $x_2 = \frac{1}{2}$ e então o conjunto $\Omega_0 = \{(x_1, x_2) | x_1 > 0,\ \frac{2}{3} < x_2 < 4\}$ contem um zero como se pode ver das interseções da figura em cima (1), e não contem a curva Γ.

– Vamos analisar a condição de Lipschitz

$$\|J(y) - J(z)\| \leq \alpha \|y - z\|$$

Na norma infinito obtemos:

$$\|J(y) - J(z)\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} -2(y_1 - z_1) & 0 \\ 2(y_1 - z_1) & -2(y_2 - z_2) \end{pmatrix} \right\|_\infty,$$

Então,

$$\begin{aligned} \|J(y) - J(z)\|_\infty &= \max\{|-2(y_1 - z_1)|, |2(y_1 - z_1)| + |-2(y_2 - z_2)|\} \\ &= |2(y_1 - z_1)| + |-2(y_2 - z_2)| = 2|(y_1 - z_1)| + 2|(y_2 - z_2)| \\ &\leq 4\|y - z\|_\infty. \end{aligned}$$

Com $\alpha = 4$, temos que a condição de Lipschitz vale para todo o plano xy, e então também em Ω_0.

– Portanto o método de Newton pode convergir para a solução com $x_1 > 0$ deste sistema considerando por exemplo o ponto initial $x^0 = (1, 1)$ porque $x_0 \in \Omega_0$ note que $x_0 \notin \Gamma$, porque $1 \neq \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 1} = 0$

– Aplicando o método de Newton com $x^0 = (1, 1)$ e com condição de saida $\|F(x^{(k)}\|_\infty < 0.05$ obtemos depois 2 iterações

$$x^{(2)} = (1.18750, 1.40217)^t$$

com a norma do residuo $\|F(x^{(2)})\|_\infty = 0.01270$.

0.1 Matlab program: Método de falsa posição

```
function newtonsystema

x0=2;
y0=1;
p0=([x0;y0]);


iter=0;

s0=-(der(p0(1),p0(2)))\fun(p0(1),p0(2));
p=p0+s0;

while max(abs(fun(p0(1),p0(2))))>=0.05 ;

s0=-(der(p0(1),p0(2)))\fun(p0(1),p0(2));
p=p0+s0;

p0=p;

iter=iter+1
p


end


end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function f=fun(x,y)
f=[y-x^2; (x-1)^2+y^2-2];

end

%%%%%%%%%%%%%%%
function jac=der(x,y)
jac=[-2*x  1 ; 2*(x-1)  2*y];

end
```

Para o intervalo $x^0 = [2, 1]$ obtemos a approximação das soluçoes (1.1845e, 1.4025) depois de 3 iterções.
Para o intervalo $x^0 = [-1, -2]$ obtemos a approximação das soluçoes (-0.4108, 0.1599) depois de 15 iterções.