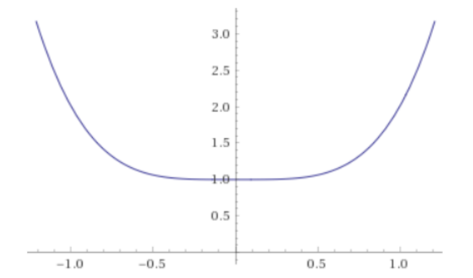
Gabarito Lista de Exercícios 3

MS211, Cálculo Numérico, Turma E. Primeiro Semestre de 2020, UNICAMP

---

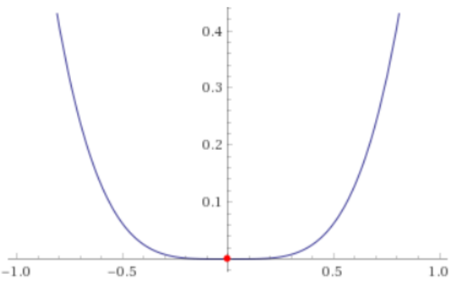
1. Escrever a expressão de um polinômio de grau 4 por cada um dos seguintes casos, os relativos zeros, e desenhar o gráfico do polinômio. Por exemplo, um polinômio de grau 2 que tem um só zero real é $p(x) = x^2 - 2x + 1$ e tem como zero $x = 1$.

   - Tem nenhum zero real.
$$P(x) = x^4 + 1 \tag{1}$$



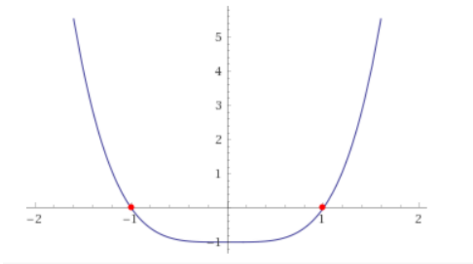
   - Tem um só zero real.

$$P(x) = x^4, \qquad x^* = 0 \tag{2}$$



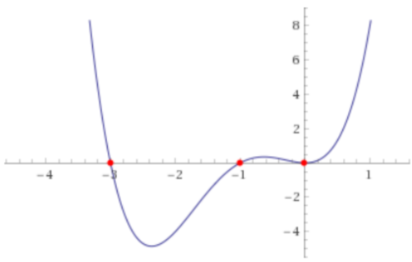
- Tem dois zeros reais.

$$P(x) = x^4 - 1, \qquad x^* = -1, 1. \tag{3}$$



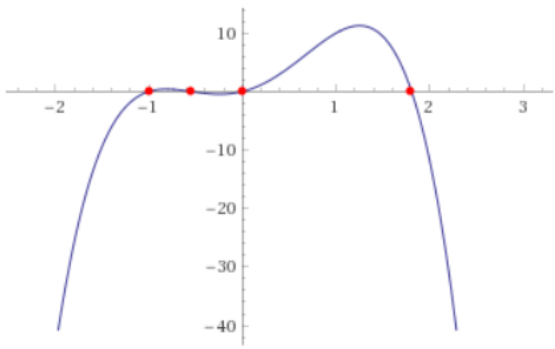
- Tem três zeros reais.

$$P(x) = x^4 + 4x^3 + 3x^2, \qquad x^* = -3, -1, 0. \tag{4}$$



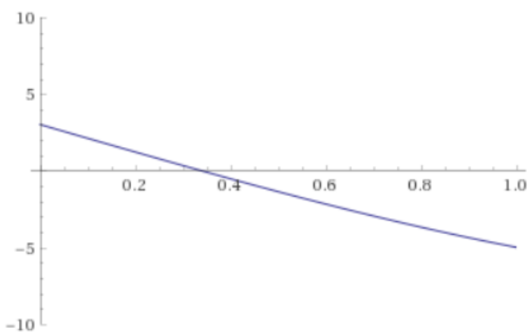
- Tem quatro zeros reais.

$$P(x) = -4x^4 + x^3 + 9x^2 + 4x, \qquad x^* = -1, -0.5542, 0, 1.8042. \tag{5}$$



2. Seja f contínua e tal que $f(a)f(b) < 0$. Quantos zeros podem existir em $[a, b]$? Pode dizer que há sempre um número impar de zeros? Porque se a função é crescente ou decrescente em $[a, b]$ pode ter somente um zero? Prova-lo graficamente.

   Resposta: -Existir pelo menos um zero em $[a, b]$.
   -Nem sempre há um número impar de zeros.
   Temos um número impar de zeros se cada zero ξ não é um ponto onde muda a monotonocidade da função, ou seja se $f(\xi) = 0$ mas $f'(\xi) \neq 0$. Temos em vez um número par de zeros se por exemplo existir um zero $\bar{\xi}$ tal que $f(\bar{\xi}) = 0$, $f'(\bar{\xi}) = 0$ e um zero ξ tal que $f(\xi) = 0$ mas $f'(\xi) \neq 0$.
   -Uma função continua crescente ou decrescente que troca de sinal nos extremos de um intervalo tem que ter atravessado o eixo das ordenas, e isso acontece somente uma vez. Uma vez atravessado o eixo não pode atravessa-lo mais porque não pode voltar em cima o voltar em baixo sendo tem uma monotoncidade que é ou sempre crescente ou sempre descrescente.
   Consider a função $p(x) = x^3 - 9x + 3$ em $[0, 1]$ $p(0) = 3$, $p(1) = -5$, portanto $p(0)p(1) < 0$, a função p é decrescente nesse intervalo.



3. Provar teoricamente (ver livro [1]) e graficamente (desenhando os pontos x_k do método por uma dada f) que o método de bisseção é convergente.

   Resposta:

4. Provar graficamente que o método da falsa posição é convergente.

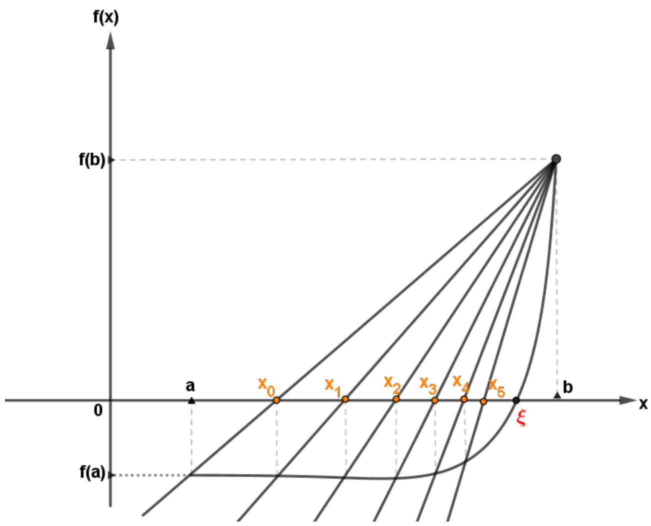


Fig. 1: Implementação grafico do método da falsa posição.

Aqui

$$\mathrm{x}_0 = \frac{a_0 f(b_0) - b_0 f(a_0)}{f(b_0) - f(a_0)}, \quad a = a_0, \quad b = b_0. \tag{6}$$

Podemos ver que a cada iteração, no grafico estamos se aproximando da raiz ξ (pontos laranjas). Portanto o método converge .

5. (*) Escreva o algoritmo e um código que dada uma função f e o intervalo $[a,b]$ determina em output uma aproximação x_k obtida pelo método da bisseção tal que verifica por dadas $\epsilon_1 > 0$ e $\epsilon_2 > 0$ ambas as condições.

   (i) $|x_k - \xi| < \epsilon_1$

   (ii) $|f(x_k)| < \epsilon_2$

   Resposta:

   Seja $f(x)$ contínua em $[a,b]$ e tal que $f(a)f(b) < 0$.

   1) Dados iniciais
      - Intervalo inicial $[a,b]$.
      - precisão ϵ_1, ϵ_2.
   2) Se $(b-a) < \epsilon_1$ e $\forall x \in [a,b]$ $|f(x)| < \epsilon_2 \rightarrow$. FIM.
   3) $k = 1$.
   4) $x = \frac{a+b}{2}$.
   5) Se $f(a)f(x) < 0$, faça $b = x$. Vai ao passo 7.
   6) $a = x$
   7) Se $(b-a) < \epsilon_1$ e se $|f(x)| < \epsilon_2$, FIM.
   8) $k = k+1$. Volte ao passo 4.

0.1 Matlab program: Método da bissecção

```
function  Bissectionmethod
clc


format short

a=1
f(a)

b=1.2
f(b)

d=f(b);




tol=$\epsilon_1$;
tol2=$\epsilon_2$;

iter=0

y=(a+b)/2
f(y)
```

```
dif=abs(b-a)
while abs(b-a)>=tol1 || abs(f(y))>=tol2

if f(a)*f(y)<0
  b=y;

    else

    a=y;


  end


iter=iter+1

y=(a+b)/2
f(y)


  end


  end
```

6. Repetir o mesmo exercício em cima mas com o método da falsa posição.
   Resposta: Para o Algoritmo ver livro na referencia da materia.

0.2 Matlab program: Método de falsa posição

```
format short
a=-1.5;
b=-2;

% O criterio de parada
tol1=$\epsilon_1$
tol2=$\epsilon_2$

%Comecando com a iteracao
iter=0;

y=(a*f(b)-b*f(a))/(f(b)-f(a));

while  abs(b-a)>=tol1 || abs(f(y))>=tol2
iter=iter+1

if f(a)*f(y)<0
  b=y;

   else
 b=y;

end
y=(a*f(b)-b*f(a))/(f(b)-f(a));
f(y)
```

```
end

end

function f=f(x)
f=3*x^3-8*x+4;
end
```

7. Repetir os dois exercícios em cima mas que tem como condição de saída do algoritmo que x_k é aceite se satisfaz $|x_k - \xi| < \epsilon_1$ e $|f(x_k)| < \epsilon_2$.

   Resposta:

8. (*) Encontrar com uma aproximação de $\epsilon_1 = 10^{-2}$ e $\epsilon_2 = 10^{-4}$ os dois zeros de $f(x) = e^x - x - 2$.

   - Use os métodos da bisseção e da falsa posição.

     Resposta:

     O método da bissecção:

     Este método é usado para encontrar as raízes de uma função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$, tendo $f(a)$ e $f(b)$ com sinais opostos, ou seja, $f(a) \cdot f(b) < 0$. Nestas condições, o teorema do valor intermediário garante a existência de uma raiz no intervalo (a, b). O método consiste em dividir o intervalo no seu ponto médio $c = (a + b)/2$, e então verificar em qual dos dois subintervalos garante-se a existência de uma raiz. Para tanto, basta verificar se $f(a) \cdot f(c) < 0$. Caso afirmativo, existe pelo menos uma raiz no intervalo (a, c), caso contrário garante-se a existência de uma raiz no intervalo $[c, b)$. O procedimento é, então, repetido para o subintervalo correspondente à raiz até que c aproxime a raiz com a precisão desejada.

     Analisando a função $f(x)$, as duas raizes se encontram nos intervalos $I_1 = [-2, -1.8]$ e $I_2 = [1, 1.2]$ ver a Figura 2.

     Para o intervalo $I_1 = [-2, -1.8]$, *com os dois criterios de parados simultaneamente*:

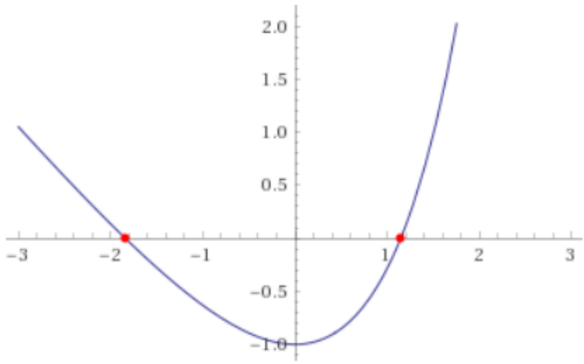


Fig. 2: A função $f(x)$

k	a	$f(a)$	b	$f(b)$	$\overline{x}$	$f(\overline{x})$	$\|b-a\|$
0	-2.0000	0.1353	-1.8000	-0.0347	-1.9000	0.0496	0.2000
1	-1.9000	0.0496	-1.8000	-0.0347	-1.8500	0.0072	0.1000
2	-1.8500	0.0072	-1.8000	-0.0347	-1.8250	-0.0138	0.0500
3	-1.8500	0.0072	-1.8250	-0.0138	-1.8375	-0.0033	0.0250
4	-1.8500	0.0072	-1.8375	-0.0033	-1.8438	0.0020	0.0125
5	-1.8438	0.0020	-1.8375	-0.0033	-1.8406	-6.5680e-04	0.0062
6	-1.8438	0.0020	-1.8406	-6.5680e-04	-1.8422	6.5789e-04	0.0031
7	-1.8422	6.5789e-04	-1.8406	-6.5680e-04	-1.8414	4.9606e-07	0.0016

Tab. 1: Método da bissecção para o intervalo $I_1 = [-2, -1.8]$, com os dois criterios de parada simultaneamente.

Para o intervalo $I_2 = [1, 1.2]$ *com os dois criterios de parados simultaneamente*:

k	a	$f(a)$	b	$f(b)$	$\overline{x}$	$f(\overline{x})$	$\|b-a\|$
0	1	-0.2817	1.2000	0.1201	1.1000	-0.0958	0.2000
1	1.1000	-0.0958	1.2000	0.1201	1.1500	0.0082	0.1000
2	1.1000	-0.0958	1.1500	0.0082	1.1250	-0.0448	0.0500
3	1.1250	-0.0448	1.1500	0.0082	1.1375	-0.0185	0.0250
4	1.1375	-0.0185	1.1500	0.0082	1.1437	-0.0052	0.0125
5	1.1437	-0.0052	1.1500	0.0082	1.1469	0.0015	0.0063
6	1.1437	-0.0052	1.1469	0.0015	1.1453	-0.0019	0.0031
7	1.1453	-0.0019	1.1469	0.0015	1.1461	-2.1347e-04	0.0016
8	1.1461	-2.1347e-04	1.1469	0.0015	1.1465	6.2501e-04	7.8125e-04
9	1.1461	-2.1347e-04	1.1465	6.2501e-04	1.1463	2.0571e-04	3.9063e-04
10	1.1461	-2.1347e-04	1.1463	2.0571e-04	1.1462	-3.8940e-06	1.9531e-04

Tab. 2: Método da bissecção para o intervalo $I_2 = [1, 1.2]$, com os dois criterios de parada simultaneamente.

O método da falsa posição:
O método da posição falsa ou regula falsi é usado para encontrar as raízes de uma função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$, tendo $f(a)$ e $f(b)$ sinais opostos, ou seja, $f(a) \cdot f(b) < 0$. Nestas condições, o teorema do valor intermediário garante a existência de uma raiz no intervalo (a, b). E assim, diminuindo esse subintervalo em partes cada vez menores, a solução estará onde a função tem sinais opostos, segundo o Teorema do Valor Intermediário.

$$x = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}, \qquad |b - a| < \epsilon_1, \qquad |f(x)| < \epsilon_2. \tag{7}$$

Para o intervalo $I_2 = [-2, -1.8]$:
Se consideramos os dois casos, i.e, (i):$|x_k - \xi| < \epsilon_1$ e (ii):$|f(x_k)| < \epsilon_2$ temos um número grande de iterações. Nesse caso é preferivel usar somente a condição $|f(x_k)| < \epsilon_2$ já que em geral o método da falsa posição obtém como raiz aproximada no ponto $\overline{x}$, no qual $|f(x)| < \epsilon$, sem que o intervalo $I = [a, b]$ seja pequeno o suficiente. Portanto, se for exigido os dois criterios de parada ao mesmo tempo, pode correr risco de ter um numero grande de iterações. Vai acontecer neste caso que com a falsa posição o intervalo $[a_k, b_k]$ não vai mudar muito por k grande e não conseguimos satisfazer $|b_k - a_k| < \epsilon_1$ Nesse caso vamos considerar então somente o criterio de parada $|f(x_k)| < \epsilon_2$ e obtemos a raiz já na primeira iteração (Ver Tabela 3).

k	a	$f(a)$	b	$f(b)$	$\overline{x}$	$f(\overline{x})$	$\|b-a\|$
0	-2	0.1353	-1.8000	-0.0347	-1.8408	-4.9603e-04	0.2000
1	-2	0.1353	-1.8408	-4.9603e-04	-1.8414	-6.9408e-06	0.1592

Tab. 3: Método da falsa posição para o intervalo $I_1 = [-2, -1.8]$ com $|f(x_k)| < \epsilon_2$.

Para o intervalo $I_2 = [1, 1.2]$ *com um criterio de parada*:

k	a	$f(a)$	b	$f(b)$	$\overline{x}$	$f(\overline{x})$	$\|b-a\|$
0	1	-0.2817	1.2000	0.1201	1.1402	-0.0128	0.2000
1	1.1402	-0.0128	1.2000	0.1201	1.1460	-4.9632e-04	0.0598
2	1.1460	-4.9632e-04	1.2000	0.1201	1.1462	-1.9165e-05	0.0540

Tab. 4: Método da falsa posição para o intervalo $I_2 = [1, 1.2]$ com $|f(x_k)| < \epsilon_2$.

- É possível saber em quantas iterações será satisfeita a condição (i), com $\epsilon_1 = 10^{-2}$ no método da bisseção? Se sim diga em quantas iterações e prova-lo com os seus resultados.
  Resposta:
  Para o método da bissecção, para $I_1 = [-2, -1.8]$ o número de iteração é dado pela formula:
  $$k > \frac{\log(b_0 - a_0) - \log(\epsilon_1)}{\log(2)}. \tag{8}$$
  Substituindo os valores na equação (8) obtemos:
  $$k > \frac{\log(-1.8 + 2) - \log(10^{-2})}{\log(2)}$$
  Então
  $$k > \frac{\log(0.2) + 2}{\log(2)} = 4.3219, \qquad \text{apos } k = 5 \quad \text{iterações satisfaremos a condição (i)} \tag{9}$$
  Para o método da bissecção, para $I_1 = [1, 1.2]$ o número de iteração é dado pela formula:
  $$k > \frac{\log(b_0 - a_0) - \log(\epsilon_1)}{\log(2)} \tag{10}$$
  Substituindo os valores na equação (10) obtemos:
  $$k > \frac{\log(1.2 - 1) - \log(10^{-2})}{\log(2)}$$
  Então
  $$k > \frac{\log(0.2) + 2}{\log(2)} = 4.3219, \qquad \text{após } k = 5 \quad \text{iterações satisfaremos a condição (i)} \tag{11}$$
- Compare os resultados dos dois métodos, e diga qual método consegue chegar a aproximação x_k em menos iterações.
  Resposta:
  Percebemos que o método da bissecção consegue usar os dois criterios de parada simultaneamente mesmo com um número maior de iteração do que o método de falsa posição que usar só um criterio de parada (o criterio de parada mais adequado).

9. Analise as derivadas da função $f(x) = 3x^3 - 8x + 4$ e diga quantos zeros tem esta função. Determine os intervalos que contem somente um zero. Aplique o método da falsa posição para determinar com a tolerância $\epsilon = 10^{-4}$ todos os zeros.
Resposta:
A derivada da função $f(x)$ é $f'(x) = 9x^2 - 8$. $f'(x)$ é negativa no intervalo $[-\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3}]$ portanto nesse intervalo a função $f(x)$ é decrescente e a função $f'(x)$ é positiva nos intervalos $(-\infty, -\frac{2\sqrt{2}}{3}]$ e $[\frac{2\sqrt{2}}{3}, \infty)$, portanto nesses intervalos a função $f(x)$ é crescente (Ver Figuras 3, 4).

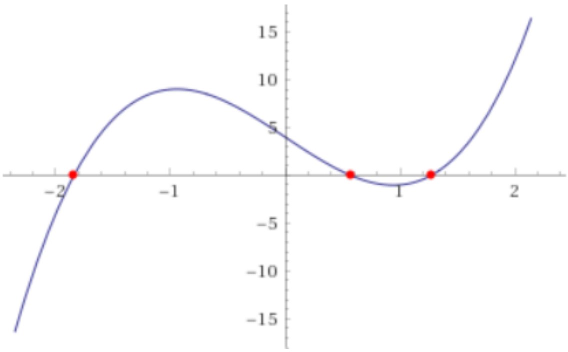


Fig. 3: A função $f(x) = 3x^3 - 8x + 4$

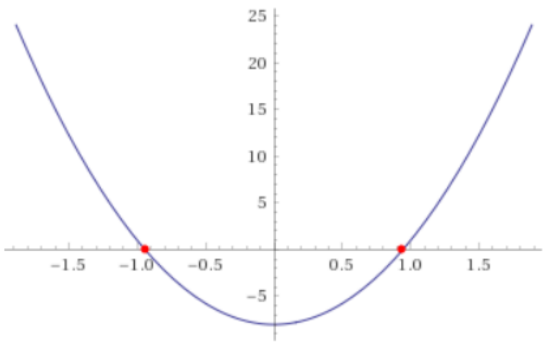


Fig. 4: A função $f'(x) = 9x^2 - 8$

Esta função tem três zeros que são $x^* = -1.8414, 0.5791, 1.2723$ (Ver Figura 3) e os intervalos que contem somente um zero são: $I_1 =]-\infty, -\frac{2\sqrt{2}}{3}]$, $I_2 = [-\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3}]$ e $I_3 = [\frac{2\sqrt{2}}{3}, \infty[$. A seguir para aplicar o método da falsa posição usaremos intervalos mais refinados $I_1 = [-2, -1.5], I_2 = [0, 0.7], I_3 = [1, 1.5]$.

0.3 Matlab program: Método de falsa posição

```
format short
a=-2;
b=-1.5;

% O criterio de parada
tol=10^(-4);

%Comecando com a iteracao
iter=0;

y=(a*f(b)-b*f(a))/(f(b)-f(a));

while  abs(f(y))>tol
 iter=iter+1

if  f(a)*f(y)>0
    a=y;

 else
    b=y;

end
y=(a*f(b)-b*f(a))/(f(b)-f(a));
f(y)

         end


   end

function  f=f(x)
f=3*x^3-8*x+4;
end
```

Para o intervalo $I_1 = [-2, -1.5]$ obtemos a approximação da raiz depois de 5 iterções.
Para o intervalo $I_2 = [0, 0.7]$ obtemos a approximação da raiz depois de 7 iterções.
Para o intervalo $I_3 = [1, 1.5]$ obtemos a approximação da raiz depois de 8 iterções.

10. (*) O método da falsa posição no intervalo $[a, b]$ pode ser mais lento no caso que o zero fica mais próximo do extremo onde o valor da $[f]$ toma o valor máximo nos extremos. Neste caso acontece que este extremo do intervalo inicial $[a, b]$ permanece como extremo também nos sucessivos intervalos obtidos do método.

    - Implemente graficamente o método da falsa posição para a função representada na figura abaixo (Ver Figura 5).

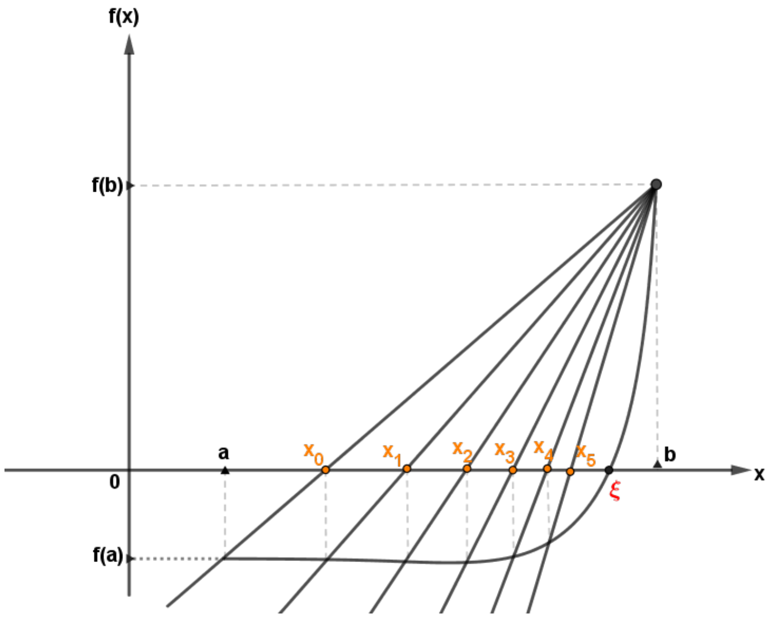


Fig. 5: Implementação grafico do método da falsa posição.

Aqui temos que:

$$x_0 = \frac{a_0 f(b_0) - b_0 f(a_0)}{f(b_0) - f(a_0)}, \quad a = a_0, \quad b = b_0. \tag{12}$$

- Verifica que o método é mais lento do método da bisseção. Traça no gráfico as iterações x_k de ambos os métodos.

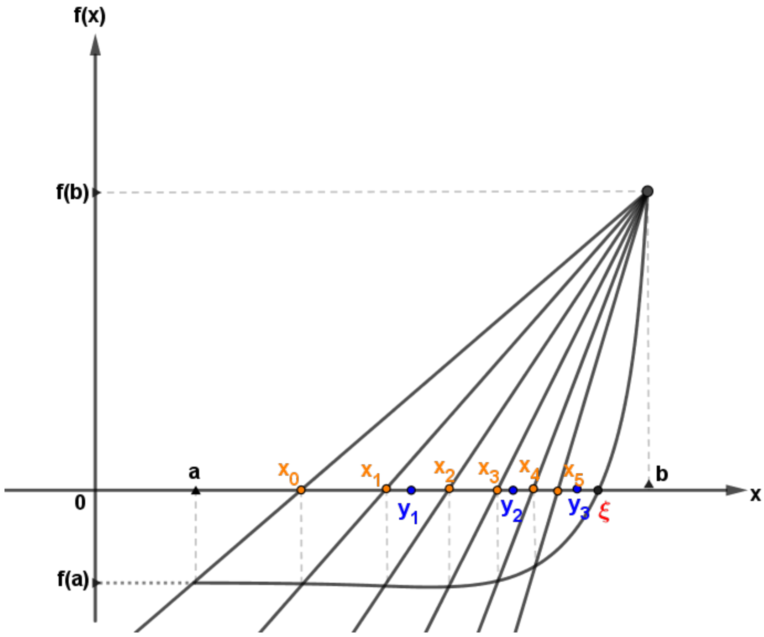


Fig. 6: Implementação grafico do método da falsa posição e do método da bissecção.

Aqui

$$x_0 = \frac{a_0 f(b_0) - b_0 f(a_0)}{f(b_0) - f(a_0)}, \quad a = a_0, \quad b = b_0. \tag{13}$$

e

$$y_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}. \tag{14}$$

Podemos ver que a cada iteração, no grafico estamos se aproximando da raiz ξ mais rapido para o método da bissecção (pontos azuis) do que para o método da falsa posição (pontos laranjas).

- Era esperável que isso (falsa posição mais lenta da bisseção) pudesse acontecer? Motive a sua resposta.

  Resposta:

  Sim é de esperar que o método da falsa posição nesse caso seja mais lento por que o zero da função se encontra mais proximo do extremo onde f tem seu valor maximo (Ver Figure 6).