Gabarito Lista de Exercícios 2

MS211, Cálculo Numérico, Turma E. Primeiro Semestre de 2020, UNICAMP

Note que, nestes exercícios usamos a notação $\mathrm{FP}(\beta, p, s)$ para a aritmética finita em base β com p dígitos na mantissa e s no expoente.

1. **(*)** Diga se algum dos seguintes problemas foram bem posto.
   No caso que o problema não fosse bem posto, existe um conjunto de dados de input Ω_I para que o problema definido em Ω_I seja bem posto? Motive a sua resposta.

   (i) Determinar a cor preferida de um conjunto de pessoas.
   Resposta: Mal posto.
   O problema é mal posto porqué se imaginamos de ter como input o conjunto de pessoas. Se perguntamos mais vezes ao mesmo conjunto de pessoas qual é a cor preferida as respostas podem variar e portanto a cor preferida vista como a cor que é escolhida mais como preferida do conjunto pode variar. Por isso noã temos unicidade do output por o mesmo input.

   Se considerássemos como input do problema as respostas do conjunto de pessoas (dadas uma vez só) podemos ter um empate na cor preferida, portanto não tem unicidade da solução (output). O problema é também mal posto porque não é continuo, variando de pouco as cores preferidas de um síngulo membro do conjunto, o resultado final da cor preferida pode variar completamente. Todos os casos em que o output é discreto leva a um problema mal posto.
   Não conseguimos encontrar um conjunto Ω_I para que o mesmo problema mas só com input em Ω_I seja bem posto.

   (ii) Determinar a temperatura máxima de amanhã, usando as temperaturas máximas dos últimos 365 dias como input.
   Resposta: Mal posto.
   Uma variação pequena nas temperaturas máximas dos últimos 365 dias não necessariamente leva a uma variação pequena na temperatura máxima de amanhã. Mais, o problema não admite solução única, porque não existe uma formula que permite de determinar exatamente a temperatura de amanha usando as temperaturas anteriores. O mesmo conjunto de temperatura dos últimos 365 dias não implica que amanhã vai ter uma temperatura exatamente determinável.
   Não conseguimos encontrar um conjunto Ω_I para que o mesmo problema mas só com input em Ω_I seja bem posto.

(iii) Determine o números de infectados de um país de um dia, usando o número de infectados do dia anterior.
Resposta: Mal posto. O número de infectados de um pais em um dia não é exatamente determinado do número de infectados do dia anterior. O problema não tem solução unica. Por isso cada dia precisamos medir os números de infectados! Mais uma variação pequena de numero de infectados de um dia pode levar a uma variação grande de infectados no dia seguinte. Imagina que adicionamos ao conjunto de infectados de um dia um só infectado que teve contato com muitas pessoas recentemente, este pode levar a uma grande variação de infectados nos dias seguintes.
Não conseguimos encontrar um conjunto Ω_I para que o mesmo problema mas só com input em Ω_I seja bem posto.

(iv) Computar dado x, o valor $x - \sqrt{2}$.
Resposta: Bem posto.
O problema admite uma única solução, que é sempre a mesma cada que inserimos o mesmo x. O erro em output $|P(x+\delta) - P(x)| = \left|(x+\delta-\sqrt{2}) - (x-\sqrt{2})\right| = \delta$ é pequeno quando o erro em input δ for pequeno.

(v) Computar x^2.
Resposta: Mal posto.
$|P(x+\delta) - P(x)| = \left|(x+\delta)^2 - x^2\right| = \left|x^2 + 2x\delta + \delta^2 - x^2\right| = \left|2x\delta + \delta^2\right| \approx 2x\delta$.
Por exemplo, se $\delta = 0.01$ e $x = 2000$, $|P(x+\delta) - P(x)| \approx 40$, um erro grande.
Se usássemos $\Omega_I = \{x| \ |x| < \frac{1}{2}\}$ o problema de computar x^2 com $x \in \Omega_I$ é bem posto.

(vi) Computar $\sin(x)$.
Resposta: Bem posto.
$|P(x+\delta) - P(x)| = |\sin(x+\delta) - \sin(x)|$.
Usando serie de Taylor obtemos $f(x+\delta) = f(x) + f'(x)\delta + f''(x)\frac{\delta^2}{2} + \cdots$
com $f'(x) = \cos(x)$, $f''(x) = -\sin(x)$. Portanto

$$\begin{aligned}
|P(x+\delta) - P(x)| &= \left|\sin(x) + \delta\cos(x) - \frac{\delta^2}{2}\sin(x) + \cdots - \sin(x)\right| \\
&= \left|+\delta\cos(x) - \frac{\delta^2}{2}\sin(x) + \cdots\right| \approx \delta\cos(x)
\end{aligned}$$

Já que a função $\cos(x)$ está entre -1 e 1, para δ pequeno o erro na solução do problem $|P(x+\delta) - P(x)|$ é pequeno.

2. Dar um problema P que sobre um conjunto de dados de input Ω seja mal posto, mas tal que se considerássemos o subconjunto $\Omega_0 \subset \Omega$ como seu conjunto de dados de input obteremos um problema bem posto.

3. Definir o conceito de estabilidade para os métodos ou algoritmos numéricos. Dar um exemplo de método estável.

   Resposta A estabilidade de um método númerico é a condição que garante que o erro não vai ficar inaceitavelmente grande ao longo que evoluimos. Em particular associada a pequenas variações de input temos de ter pequenas variações de output do método. Se consideramos o problema da média aritmetica de um conjunto de valores $x_{i i=1,\dots,N}$ positivos. O algoritmo que computa antes a soma de todos os x_i e depois divide por N é uma algoritmo estavel se os valores foram todos positivos. No caso em que aparecem valores positivos ou negátivos, o mesmo algoritmo pode ser instável porque podemos ter cancelamento substrativo ousseja durante a soma pode aparecer a soma $\sum_{i=1}^{m} x_i + x_{m+1}$ com $x_m \approx -\sum_{i=1}^{m} x_i$. Onde evitar isto poderia usar um algoritmo que computa a soma de todos os numeros positivos e depois a soma de todos os valores absolutos dos numeros negativos, depois disso usaremos uma só subtração, e dividiremos o resultado final por N. Este algoritmo evita muitas subtrações resultando ser mais estavel.

4. **(*)** Considere o problema de computar o determinante de uma matriz A de dimensão 2 ($A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$)

   - Escreva um algoritmo para computar o determinante $det(A)$ da matriz A e sucessivamente escreva o código associado

     Resposta:

Algoritmo **Require:** $a11$, $a12$, $a21$, $a22$, os coefficientes da matrix

1: $detA \leftarrow a11 * a22 - a12 * a21$

Código em Python

```
#encoding: utf-8
from __future__ import print_function
a = float(input('Digite o valor de A1x1:'))
b = float(input('Digite o valor de A1x2:'))
c = float(input('Digite o valor de A2x1:'))
d = float(input('Digite o valor de A2x2:'))
det = (a*d) - (c*b)
print ('Determinante da matriz A = ',det)
```

   - Considere

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 101 & 101.1 \\ 1.187 & 1.186 \end{pmatrix}$$

     – O seu algoritmo é estável para computar o determinante $det(\bar{A})$ em $FP(10, 4, 1)$?

       Resposta:
       O algoritmo do calculo do determinante de em cima não é estavel porque presenta uma subtração $detA = a11 * a22 - a21 * a12$ que no caso de matrizes com linhas ou columnas linearmente dependentes tem de dar zero porque teremos $a_{11} * a_{22} = a_{12} * a_{21}$. Por causa de trabalhar em aritmetica finita vai acontecer que com as aproximações $\overline{a_{11} * a_{22}} \approx \overline{a_{21} * a_{12}}$ e isso pode causar o erro de cancelamento subtrativo ou seja teremos que o resultante valor $\overline{\overline{a_{11} * a_{22}} - \overline{a_{21} * a_{12}}}$ tem um erro relativo grande respeito o determinante de A, $det(A)$. Por isso o

calculo do determinante resultará estavel somente se trabalhamos com matrizes com linhas ou columnas linearmente independentes e com um $det(A)$ distantes de zero. Se as columnas foram quase linearmente dependentes como no nosso caso $columna_1 \approx k \cdot columna_2$ com $k \in \mathbb{R}$, podemos ter problemas no acertar o valor exato do determinante. Note que nosso caso $k = 1$.

– Compare o calculo de $det(\bar{A})$ em $FP(10, 4, 1)$ com o valor real (obtido com o seu programa no seu computador a 64 ou 32 bit)

Resposta:
Com o meu computador, usando o código em cima, obtenha se $detA = -0.2197$. Note que este é o valor exato do determinante, ousseja o computador não fiz alguma aprroximação, mesmo porque trabalha com 64 bit e consegue manipular bem as operações desta matriz onde ao maximo são necessários 7 digitos (note por exemplo que que 1.187*101.1= 120.0057).
Notamos que todos os coefficientes da matriz são já bem representados no sistema de ponto flutuante $FP(10, 4, 1)$, por isso não precisam alguma representação diferente. Usando o truncamento em $FP(10, 4, 1)$ obtem-se

$$\overline{\det A_t} = \overline{a_{11} * a_{22}} - \overline{a_{12} * a_{21}} = 119.7 - 120 = -0.3$$

Usando o arredondamento

$$\overline{\det A_t} = \overline{a_{11} * a_{22}} - \overline{a_{12} * a_{21}} = 119.8 - 120 = -0.2.$$

O erro relativo com o truncamento é portanto

$$E_t = \frac{\overline{\det A_t} - \det A}{\|detA_t\|} \approx 0.2677 = 26.77\%$$

O erro relativo com o arredondamento é portanto

$$E_a = \frac{|\overline{\det A_a} - \det A|}{\|detA_a\|} \approx 0.0985 = 9.85\%$$

– Pode dizer quando o algoritmo será estável ao variar dos coeficientes da matriz? Dar um exemplo numérico que comprove a sua afirmacão.

Resposta:
No caso de ter uma matriz com linhas ou columnas não quase linearmente dependendentes e tal que não usamos algum arredondamento, por exemplo com $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ obtemos em $FP(10, 4, 1)$ $\det(A) = -2$ o valor exato.

5. Determine entre as seguintes expressões quais são infinitésimos por $h \longrightarrow 0$, e determine a correspondente ordem k (veja a definição $\mathcal{O}(h^k)$ usada nas aulas): $\frac{h}{2}$, $\frac{-h}{5}$, $-h+3$, 1, $\frac{h^2}{2}$, $\frac{-h^2}{2}+h^3$, $\sqrt{h}$ $\frac{h^2}{2}+h^3+\sqrt{h}$, $\sqrt{h+1}$, k^2+h.

Resposta:

Infinitesimo por $h \to 0$ e a ordem			
$\frac{h}{2}$	$O(h)$	$\sqrt{h}$	$O(h^{1/2})$
$\frac{-h}{5}$	$O(h)$	$h^3+\sqrt{h}$	$O(h^{1/2})$
$-h+3$	Não	$\sqrt{h+1}$	Não
1	Não	k^2+h	Não
$\frac{h^2}{2}$	$O(h^2)$		
$\frac{-h^2}{2}$	$O(h^2)$		
$\frac{-h^2}{2}+h^3$	$O(h^2)$		
$\frac{h^2}{2}+h^3$	$O(h^2)$		

6. **(*)** Considere a fórmula de diferencas finitas.

$$D_2u(x) = \frac{u(x+2h)-u(x-2h)}{4h}$$

.

- É uma formula centrada? Motive a sua resposta.
  Resposta:

  Sim é uma fórmula centrada. Podemos ver que x está centrado aos dois pontos e segue a fórmula padrão das Diferenciais Finitas Centradas.

- Prove que esta fórmula aproxima a derivada $u'(x)$ e determine o correspondente erro $D_2u(x) - u'(x)$ de aproximação.

  Resposta:
  $D_2u(x) = \dfrac{u(x+2h)-u(x-2h)}{4h}$.
  Usando a expansão de serie de Taylor obtemos:

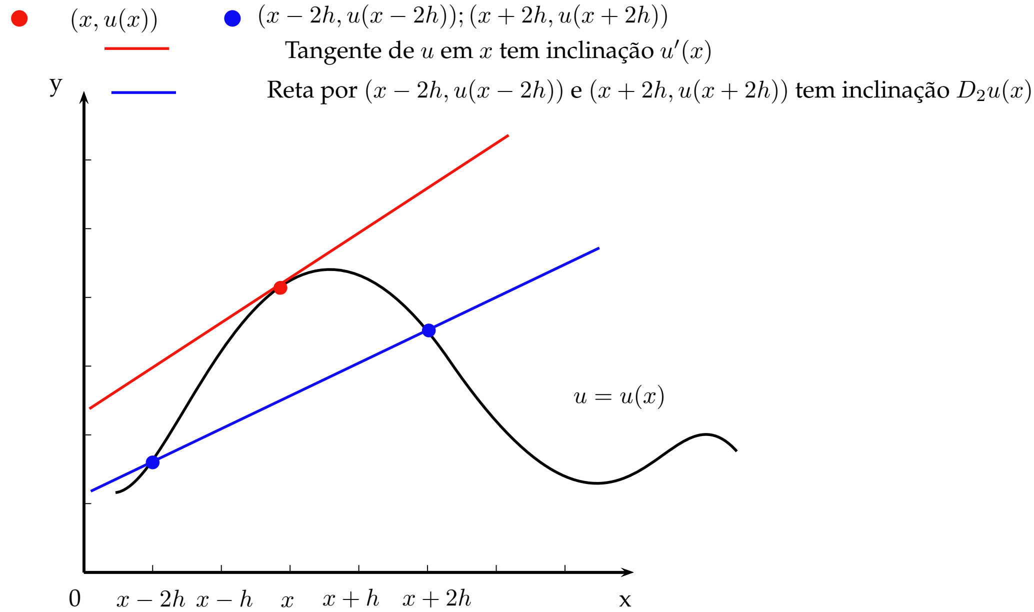
$$\begin{aligned} u(x+2h) =& u(x) + u'(x)(2h) + u''(x)\frac{(2h)^2}{2!} + u'''(x)\frac{(2h)^3}{3!} + u''''(x)\frac{(2h)^4}{4!} + O((h)^5) \\ u(x-2h) =& u(x) - u'(x)(2h) + u''(x)\frac{(2h)^2}{2!} - u'''(x)\frac{(2h)^3}{3!} + u''''(x)\frac{(2h)^4}{4!} - O((h)^5) \end{aligned}$$

$$\frac{u(x+2h)-u(x-2h)}{4h} - u'(x) = +\frac{2h^2}{3}u'''(x) + O(h^4)$$

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{u(x+2h)-u(x-2h)}{4h}-u'(x)\right)=0$$

O que implica que esta fórmula aproxima a derivada $u'(x)$. O correspondente erro $D_2u(x)-u'(x)$ de aproximação é $\approx \frac{2}{3}h^2u'''(x)$.

- De que ordem é esta fórmula? Motive a sua resposta.
  Resposta: Esta fórmula é de segunda ordem. Isso porque o erro da differenciação $D_2u(x)-u'(x)=\frac{2}{3}h^2u'''(x)+O(h^4)$ é um infinitesimo de ordem 2, é do tipo $O(h^2)$.
- Dar uma interpretação grafica da fórmula $D_2u(x)$ na aproximação de $u'(x)$ **Resposta:**



7. Prove usando a expansão em Serie de Taylor de $u(x+h)$ e $u(x-h)$ que a seguinte fórmula de diferenças finitas

$$\frac{u(x+h)-2u(x)+u(x-h)}{h^2} \tag{1}$$

aproxime a derivada segunda $u''(x)$ e que tem segunda ordem.

Resposta: Pela expansão de serie de Taylor

$$\begin{aligned} u(x+h) \approx& u(x)+u'(x)h+u''(x)\frac{h^2}{2!}+u'''(x)\frac{h^3}{3!}+u''''(x)\frac{h^4}{4!}+u^5(x)\frac{h^5}{5!}+O(h^6)\\ u(x-h) \approx& u(x)-u'(x)h+u''(x)\frac{h^2}{2!}-u'''(x)\frac{h^3}{3!}+u''''(x)\frac{h^4}{4!}-u^5(x)\frac{h^5}{5!}+O(h^6) \end{aligned}$$

$$\frac{u(x+h)-2u(x)+u(x-h)}{h^2}\approx\frac{u''(x)h^2+2u''''(x)\frac{h^4}{4!}+O(h^6)}{h^2}$$

$$D_c \approx u''(x) + u''''(x)\frac{h^2}{12} + O(h^4)$$

$$D_c - u''(x) \approx u''''(x)\frac{h^2}{12} + O(h^4)$$

$$\lim_{h \to 0} D_c = u''(x).$$

O que implica que a formulação (1) aproxime a derivada segunda $u''(x)$ e que tem segunda ordem. Por tanto, $D_c \approx u''(x)$.