MS211, Cálculo Numérico, Turma E
Primeiro Semestre de 2020, UNICAMP

Lista de Exercícios 6

Entrega por Google Classroom dos exercícios e itens marcados com (*) até Sábado 08/08/2020.
Os exercícios e os itens (*) podem ser desenvolvidos em grupos de até <u>três</u> membros.

(1) Peso 50% na nota final
Resolva o seguinte problema de valor inicial usando vários métodos numérico Verifique se consegue chegar a solução $y(x) = \frac{11}{4}e^{-2(x+1)} + \frac{2x-1}{4}$.

$$\begin{cases} y' = -2y + x \\ y(-1) = 2 \end{cases}$$

(a)* Achar a solução $y = y(x)$ no ponto $x = 10$, usando o método de Euler explicito com $h = 1/8$, $h = 1/16$, $h = 1/32$, $h = 1/64$, $h = 1/128$.

(b)* Verifique se com o os dados obtidos pode confirmar que o método de Euler Explicito é de primeira ordem

(c)* Repetir os dois itens anteriores usando o método de Euler implícito. Utilizando uma forma explicita similar a aquelas apresentada na aula, que se obtém para problemas lineares em y do tipo

$$\begin{cases} y' = \lambda y \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

(d)* Agora usando o método do ponto fixo em cada passo de Euler implícito, aproxima a solução do PVI em cima novamente em $x = 10$,
e usando $h = 1/8$, $h = 1/16$, $h = 1/32$, $h = 1/64$, $h = 1/128$.
Use como critério de saída no ciclo do método do ponto fixo (associado a Euler implícito) o seguinte : $|y_i^{(k+1)} - y_i^{(k)}| < 10^{-10}$

(e)* Resolve o item anterior mas usando esta vez o método de Crank Nicolson.

(f)* Usando os resultados obtidos nos dois itens anteriores pode afirmar que O método de Crank Nicolson resulta ser mais acurado a paridade de h respeito o método de Euler implícito? Era esperável que esta afirmação fosse verdadeira? Motive a suas respostas.

- Usando os dados dos itens anteriores verifique se o método de Euler implícito é de primeira ordem e se Crank Nicolson resulta ser de segunda ordem. Note que não sempre este é fácil verificar quando estamos trabalhando com valores de erro muitos pequenos. Note que o parar não ao infinito a iteração do ponto fixo com $tol = 10^{-10}$ afeta os resultados dos métodos.

(2) Peso 25% na nota final Considere a seguinte equação diferencial não linear (PVI não linear)

$$\begin{cases} y' = \cos(y+x) \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

(a)* achar o valor da solução $y(x)$ da PVI em cima no ponto $\bar{x} = 10$ usando Euler aperfeiçoado, e diferentes tamanhos de passo: $h = 1$, $h = 1/2$, $h = 1/4$, $h = 1/10$.

(b)* Indicado com e_0 o erro feito com $h = 1$ em que relação encontram-se os erros e_i (associado a $h = \frac{1}{2^i}$) respeito ao erro e_0? E o erro $e_{\frac{1}{10}}$ obtido com $h = \frac{1}{10}$ pode ser deduzido do erro e_0?

(c)* Sabendo que o erro $e_0 = 1.1672 \cdot 10^{-2}$ É possível encontrar um $h = 1/2^k$ tal que o erro associado e_k seja menor de um dado $\varepsilon > 0$? Se sim, encontre k tal que $|e_k| < 10^{-9}$

(d) Sabendo que o método de Euler aperfeiçoado tem o erro de truncamento $T_h = h^3 \left(\frac{y'''}{6} - \frac{1}{8}(f_{xx} - 2ff_y + f^2 f_{yy}) \right)$
e que no nosso problema o erro global satisfaz

$$|e_h(\bar{x})| \leq \frac{T_h}{h}(e^{(\bar{x}-x_0)} - 1)$$

estimar o erro associado a cada uma aproximações obtidas no item a.

(3) (*) Peso 25% na nota final Considere o seguinte PVC

$$\begin{cases} y'' = y' + 2y + x \\ y(-1) = 2 \\ y(2) = 3 \end{cases}$$

Achar uma aproximação da solução em $x = 1$, usando um método de diferenças finitas de segunda ordem para vários espaçamentos: $h = 1/2$, $h = 1/4$, $h = 1/10$.
Comparar os resultados obtidos e dizer de quanto o erro diminui com estes h respeito o erro e_0 obtido do método se usássemos $h = 1$.