MS211, Cálculo Numérico, Turma E
Primeiro Semestre de 2020, UNICAMP

Lista de Exercícios 4

Entrega por Google Classroom dos dois exercícios marcados com (*) até Sábado 13/06/2020.
Os dois exercícios (*) podem ser desenvolvidos em grupos de até <u>dois</u> membros.

(1) Qual dos seguintes sistemas são consistentes? Neste caso quantas soluções possuem? Motive a sua resposta.

$$1)\quad \begin{cases} 3x+2y=2 \\ -3x+2y=2 \end{cases} \qquad 2)\quad \begin{cases} 3x+2y=2 \\ 3x+2y=4 \end{cases}$$

$$3)\quad \begin{cases} 3x+2y=2 \\ -6x-4y=-4 \end{cases} \qquad 4)\quad \begin{cases} 3x+2y-z=2 \\ 4x-y+z=0 \end{cases}$$

$$5)\quad \begin{cases} 3x+2y=2 \\ -3x+2y=3 \\ 4x+2y=1 \end{cases} \qquad 6)\quad \begin{cases} 3x+2y-3z=2 \\ 4z+y=4 \\ 6x+4y-6z=-4 \end{cases}$$

(2) Calculo do Determinante de uma matriz

- Descrever um algoritmo para achar o determinante $\det(A)$ de uma matriz A de dimensão n.
- Determinar o numero de operações (custo computacional) para determinar $\det(A)$ usando este algoritmo, no caso de $n = 1, 2, 3, 4$.
- É possível chegar a uma formula que diga por qualquer n o custo computacional do cálculo do determinante com o seu algoritmo? Se sim escreva a formula do custo, e descreva como foi obtida.

(3) Considera o método de Newton para determinar um zero ξ de $f(x)$, tal que $f'(\xi) \neq 0$.

- Qual condição tem de satisfazer o x_0 inicial do método condições iniciais tem de satisfazer o método.
- Porque se $f'(\xi) = 0$ o método de Newton não é utilizado. Tente aplicar o método de Newton para achar o zero de $f(x) = x^2 - 4x + 4$, o que acontece? Note que esta $f(x)$ tem zero em $x = 2$ mas é tal também que $f'(2) = 0$.

(4) (*) (Exemplo de modelagem) Seja r a taxa de juro mensal (se for por exemplo $r = 0.5$ está corresponde a percentagem 50%) de uma conta num fundo monetário. Se uma pessoa investe p inicialmente, depois m meses tem na conta $f(m) = p \cdot (1 + r)^m$.

- Porquê o valor da conta depois m meses é $f(m)$?
- Imagina que um cliente quer retirar o dinheiro quando tem na conta $4\sqrt{m} + 10000$ reais depois m meses investidos. Quantos meses m^* tem de esperar para retirar o seu dinheiro da conta?
- Determine m^* se usar taxa $r = 3\%$ e tem investido inicialmente 1000 reais. Usar o método de Newton para resolver este problema.
  - Qual condição inicial m_0 pode usar, para que o método converge? (Dica: Veja o Teorema de convergência do método de Newton em pagina 25, Encontra ele chutando um m_0 inicial que satisfaz as condições do teorema. Tente chutar m_0 como múltiplo de 10).
  - Com a escolha $\epsilon = 10^{-2}$, $|f(x_k)| < \epsilon$, em quantas iterações o método satisfaz esta condição? A resposta vem depois aplicando o método.
  - Com a escolha $\epsilon = 10^{-2}$, $|x_k - x_{k-1}| < \epsilon$, em quantas iterações o método satisfaz esta condição?
  - Com a escolha $\epsilon = 10^{-2}$, $|x_k - \xi| < \epsilon$, em quantas iterações o método satisfaz esta condição? Para responder a esta pergunta, lembre que do teorema da aula 10 (slide 11) vale que $|x_k - \xi| < \frac{M}{1-M}|x_k - x_{k-1}|$ portanto para ter $|x_k - \xi| < \varepsilon$ pode verificar se $\frac{M}{1-M}|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$

(5) No método da secante é preciso conhecer duas iterações iniciais bastante perto do zero. Pelo teorema de convergência sabemos que se ξ for o único zero de f em $[a, b]$ vale temos de pegar x_0, x_1 tais que sejam próximos e ξ a menos de um valor $\tilde{M} = \frac{2M_1}{M_2}$, (ou seja $|x_0 - \xi| < \tilde{M}$ e analogamente por x_1). onde $M_1 \leq |f'(x)| \leq M_2$ por cada x em $[a, b]$. Considere a função $f(x) = xe^x - 3$

- Verifique que existe um único zero em $[0, 2]$.
- Achar os limites M_1 e M_2 em $[0, 2]$
- Escolher x_0 e x_1 para que o método possa convergir
- Escreva o código do método da secante
- Implementa o código e monstra com uma tabela que com os x_0 , x_1 escolhidos tem convergência.

(6) Uma outra maneira de achar x_0, x_1 do método da Secante (ou a iteração inicial do método de Newton x_0) suficientemente próximos do zero e de aplicar um outro método que sabemos convergente e pegar como x_0, x_1 como as x_{k-1}, x_k deste outro método convergente. Por exemplo conhecendo que em $[a, b]$ tem um único zero implementamos antes o método da bisseção, com poucas iterações até que chagamos a um x_k tal que $|x_k - \xi| < \delta$, e depois aplicamos o método da secante com $x_0 = x_{k-1}$ e $x_1 = x_k$, assim aceleremos o método da bisseção e chegaremos com poucas iterações a condição $|x_k - \xi| < \varepsilon$, com $\varepsilon << \delta$.
Considere o caso da função $f(x) = xe^x - 3$ no intervalo $[0, 2]$, veja o item anterior.

- Aplique 3 iterações da bisseção e use o x_2, x_3 como x_0 e x_1 do método da secante. O método da secante com estas x_0, x_1 converge ao zero de f? Se note durante a implementação uma certa convergência, escreva as iterações obtidas até chegar a condição $|f(x_k)| < 1e - 7$.

(7) (*) Considere a função $f(x) = cos(2x) - x^2$,

- Faça o gráfico desta função em $[a, b] \subset [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$, somente dando os valores da f num numero finito de pontos em $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$
- Quantos zeros tem a função? Verifique se os zeros da função f são simétricos respeito o eixo das y.
- Achar uma função $\varphi(x)$ tal que o seu ponto fixo seja zero de $f(x)$.
- Verifique se esta função $\varphi(x)$ é tal que o método do ponto fixo $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ converge **a um seu zero positivo**. Ou seja pelo teorema de convergência, tem de encontrar um intervalo $I \subset [a, b]$ que contem o zero, e um ponto x_0 tal que as condições i), ii), iii), sejam validas (veja slide 10 da Aula 10).

  Dica: Avalie as $\varphi(x)$ do tipo $\varphi(x) = x - c * f(x)$ onde c é um real tal que $|c| < 1$, $c \neq 0$.
- Escreva um código para este método do ponto fixo Verifique que obtém convergência ao zero da sucessão x_k com o x_0 determinado no item anterior. Use como critério de paragem $|f(x_k)| < 10^{-5}$.