MS211, Cálculo Numérico, Turma E
Primeiro Semestre de 2020, UNICAMP

Lista de Exercícios 3

Entrega por Google Classroom dos três exercícios marcados com (*) até Terça Feira 19/05/2020.
Os exercícios (*) podem ser desenvolvidos em grupos de até dois membros.

(1) Escrever a expressão de um polinômio de grau 4 por cada um dos seguintes casos, os relativos zeros, e desenhar o gráfico do polinômio.

- tem nenhum zero real
- tem um só zero real
- tem dois zeros reais
- tem três zeros reais
- tem quatro zeros reais

Por exemplo, um polinômio de grau 2 que tem um só zero real é $p(x) = x^2 - 2x + 1$ e tem como zero $x = 1$.

(2) Seja f contínua e tal que $f(a)f(b) < 0$ Quantos zeros podem existir em $[a, b]$? Pode dizer que há sempre um número impar de zeros? Porque se a função é crescente ou decrescente em $[a, b]$ pode ter somente um zero? Prova-lo graficamente.

(3) Provar teoricamente (ver livro [1]) e graficamente (desenhando os pontos x_k do método por uma dada f) que o método de bisseção é convergente

(4) Provar graficamente que o método da falsa posição é convergente

(5) **(*)** Escreva o algoritmo e um código que dada uma função f e o intervalo $[a, b]$ determina em output uma aproximação x_k obtida pelo método da bisseção tal que verifica por dadas $\varepsilon_1 > 0$ e $\varepsilon_2 > 0$ ambas as condições

(i) $|x_k - \xi| < \varepsilon_1$
(ii) $|f(x_k)| < \varepsilon_2$

(6) Repetir o mesmo exercício em cima mas com o método da falsa posição

(7) Repetir os dois exercícios em cima mas que tem como condição de saída do algoritmo que x_K é aceite se satisfaz $|x_k - \xi| < \varepsilon_1$ ou $|f(x_k)| < \varepsilon_2$

(8) **(*)** Encontrar com uma aproximação de $\varepsilon_1 = 10^{-2}$ e $\varepsilon_2 = 10^{-4}$ os dois zeros de $f(x) = e^x - x - 2$.

- Use os métodos da bisseção e da falsa posição.
- É possível saber em quantas iterações será satisfeita a condição (i), com $\varepsilon_1 = 10^{-2}$ no método da bisseção? Se sim diga em quantas iterações e prova-lo com os seus resultados.
- Compare os resultados dos dois métodos, e diga qual método consegue chegar a aproximação x_k em menos iterações.

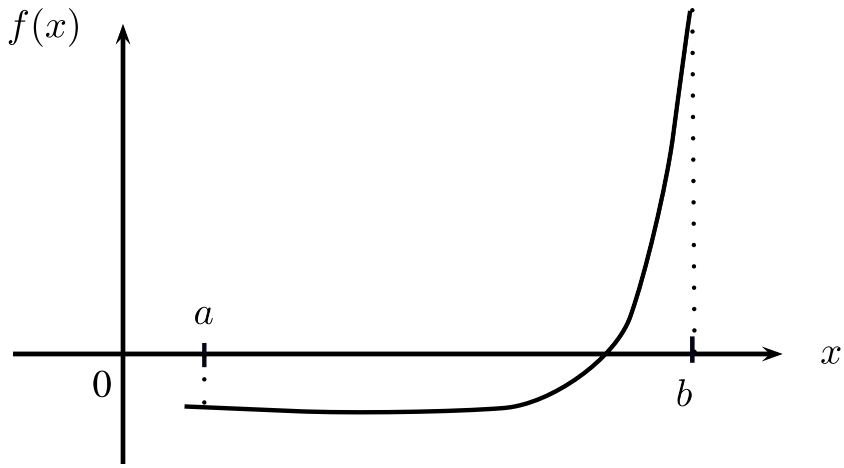
(9) Analise as derivadas da função $f(x) = 3x^3 - 8x + 4$ e diga quantos zeros tem esta função. Determine os intervalos que contem somente um zero. Aplique o método da falsa posição para determinar com a tolerância $\varepsilon = 10^{-4}$ todos os zeros.

(10) (Exemplo de modelagem) Seja r a taxa de juro mensal (se for por exemplo $r = 0.5$ está corresponde a percentagem 50%) de uma conta num fundo monetário. Se uma pessoa investe P inicialmente, depois m meses tem na conta $f(m) = p \cdot (1 + r)^m$.

- Porquê o valor da conta depois m meses é $f(m)$?
- Imagina que um cliente quer retirar o dinheiro quando tem na conta $4\sqrt{m} + 10000$ reais depois m meses investidos. Quantos meses m^* tem de esperar para retirar o seu dinheiro da conta?
- Determine m^* se usar taxa $r = 3\%$ e tem investido inicialmente 1000 reais. Usar o método da bisseção e a falsa posição para resolver este problema.

(11) **(*)** O método da falsa posição no intervalo $[a, b]$ pode ser mais lento no caso que o zero fica mais próximo do extremo onde o valor da $|f|$ toma o valor máximo nos extremos. Neste caso acontece que este extremo do intervalo inicial $[a, b]$ permanece como extremo também nos sucessivos intervalos obtidos do método.

- Implemente graficamente o método da falsa posição para a função representada na figura abaixo (ver pagina 3).
- Verifica que o método é mais lento do método da bisseção. Traça no gráfico as iterações x_k de ambos os métodos.
- Era esperável que isso (falsa posição mais lenta da bisseção) pudesse acontecer? Motive a sua resposta.


$f(x)$
a
x
0
b