Problemas bem postos e Estabilidade de Métodos Numéricos

MS211 – Cálculo Numérico

Giuseppe Romanazzi

5 Abril 2020

Problema bem posto

Um Problema P, definido num conjunto de dados de input Ω_I, é dito bem posto, se satisfaz o seguinte:

- Por cada dado de input $x \in \Omega_I$, existe uma única solução do problema P que será indicada com $P(x)$
- Cada vez que damos o mesmo dado de input x é esperado sempre a mesma solução $P(x)$
- A solução depende em maneira contínua dos dados de input. Este significa que pequenas variações dos dados de input:
  x, $x + \delta$, com $|\delta|$ pequeno
  levam a pequenas variações nas soluções:
  $|P(x + \delta) - P(x)|$ resulta ser pequena

Exemplos de problemas numéricos

- Problema 1: Dado o valor x consideramos o problema de computar $P(x) = x + 3$.
  Se em vez de x for dado $x + \delta$, com $\delta > 0$ pequeno, obtemos a diferença (erro) na solução
  $|P(x + \delta) - P(x)| = |x + \delta + 3 - (x + 3)| = \delta$.
  Portanto se em vez de $x + 3$ computamos $x + \delta + 3$ cometemos um erro pequeno. **O problema é bem posto!**

- Problema 2: Computar dado x o valor $f(x) = e^x$. Se for dado $x + \delta$ com δ pequeno em modulo.
  Usando a expansão em serie de Taylor com centro em x de uma função f diferenciável temos:

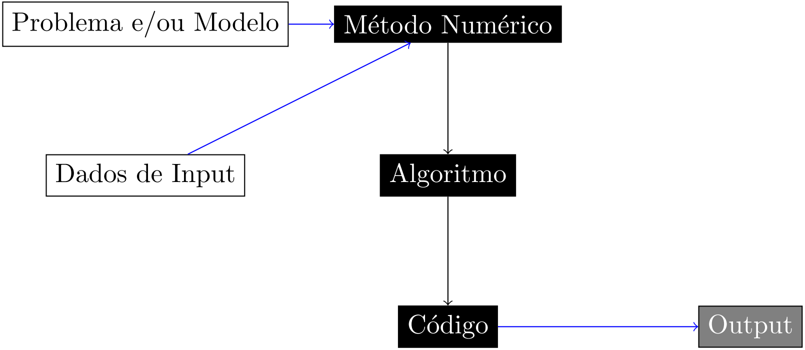
  $$f(x+\delta) = f(x)+f'(x)\delta+f''(x)\frac{\delta^2}{2!}+f'''(x)\frac{\delta^3}{3!}+\ldots+f^{(k)}(x)\frac{\delta^k}{k!}+\ldots$$

  O erro na solução é
  $|e^{x+\delta} - e^x| = |\delta e^x + \frac{\delta}{2}e^x + \frac{\delta}{2}e^x + \ldots| \approx \delta e^x$.
  A ultima aproximação vale se for δ pequeno (pelomenos $\delta < 1$) porque vale que $\delta > \frac{\delta^2}{2} + \frac{\delta^3}{3!} + \ldots$.
  O erro na solução $|e^{x+\delta} - e^x| \approx \delta e^x$ depende de x e de δ.
  Este erro é grande se x for grande mesmo com δ pequeno, por isso **o problema é mal posto.**
  Por exemplo, se $\delta = 0.01$ e $x = 10$, teremos um erro grande na solução $|e^{x+\delta} - e^x| \approx 0.01e^{10} = 220.2647$.
  Note que $|e^{x+\delta} - e^x| = 221.3697$.

Observações

- É sempre recomendável não resolver problemas mal postos
- Se o problema não tiver solução única por uma dado input, nunca vamos saber o erro que cometemos. Pense aos eventos/problemas como lançamento de moedas, sondagens ou todos os fenômenos sem uma solução certa, eles não vão poder ser resolvidos numericamente com um erro controlável com os métodos discutidos nesta disciplina.
- Note que a necessidade do problema ter uma variação continua na solução é muito importante porque **sempre temos variações nos dados de input** respeito os dados reais. Pense aos erros de representação ou inerentes ou random ou de modelagem estes todos vão influir nos dados de input. Portanto se o método não for bem posto não temos a esperança de resolver ele acuradamente.
- Note que o Problema 2 anterior é um problema bem posto se x for pequeno e em vez é mal posto se x for grande, portanto as vezes se reduzimos o domínio de input de um problema mal posto, podemos ter um problema bem posto

Problema e Método Numérico



Estabilidade dos métodos numéricos

Um método numérico (ou um algoritmo) diz se estável: se quando for aplicado a um problema bem posto, o método (ou o algoritmo) com uma pequena variação nos dados de input leva a uma pequena variação dos dados de output. Observamos que

- se resolvemos com um método estável um problema mal posto, vamos ter grande variação no output por pequena variação no input;
- se resolvemos um problema bem posto com um algoritmo não estável podemos ter grande variação no output também;
- as vezes o mesmo método tem regiões de estabilidade onde se pegamos o input neste regiões o método resulta estável, se em vez pegamos os dados de input afora da região de estabilidade o método resulta ser instável (grande variação dos output associada a pequena variação dos dados de input).
- Quase sempre por um problema bem posto é possível encontrar um método estável!

Referencia: "Métodos Numéricos" M. Cristina C. Cunha, Editora Unicamp

Solução de uma equação de segunda ordem (solução do binômio)

Resolvemos o problema bem posto $ax^2 + bx + c = 0$ com dois métodos um não estável e um estável.

- Método 1: Computar
  $x_1 = -b + \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $x_2 = -b - \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

- Método 2:
  Se $b < 0$ computar x_1 como feito no método 1
  e depois x_2 usando a relação $x_1 * x_2 = \dfrac{c}{a}$, $x_2 = \dfrac{c}{ax_1}$;

  Se $b > 0$ computar x_2 como feito no método 1
  e depois x_1 usando a relação $x_1 * x_2 = \dfrac{c}{a}$, $x_1 = \dfrac{c}{ax_2}$.

O calculo de x_1, x_2 é um problema bem posto. Vamos analisar agora o que pode acontecer numericamente numa aritmética finita. Admitindo que a seja diferente de zero (e não perto de zero) a única operação que pode dar um erro (relativo) de representação grande é a subtração no calculo de x_1, x_2:

- quando subtraímos quantidades próximas temos o erro do cancelamento subtrativo (ver aula anterior).

Isso acontece no nosso problema :

- se $b^2 \approx 4ac$
- se $b \approx \sqrt{b^2 - 4ac}$ (no calculo de x_1 quando $b > 0$)
- se $-b \approx \sqrt{b^2 - 4ac}$ (no calculo de x_2 quando $b < 0$)

Análise do Problema, cancelamento subtrativo

1. $b^2 \approx 4ac$,
2. $b \approx \sqrt{b^2 - 4ac}$ (no calculo de x_1 quando $b > 0$),
3. $-b \approx \sqrt{b^2 - 4ac}$ (no calculo de x_2 quando $b < 0$).

- Notamos que o primeiro caso pode ser raro;
- O segundo e terceiro caso não podem acontecer contemporaneamente, porque dependem do sinal de b.
- O segundo e terceiro caso são mais frequentes e acontecem sempre que $b^2 >> 4ac$ ou seja se b é bastante grande respeito a e c.

Exemplo, método 1

Resolvemos usando 5 dígitos significativos na $FP(10, 5, 1, T)$ o problema $x^2 - 100.22x + 1.2371 = 0$.
Observamos que $b = -100.22$, $b^2 = 10044$ e $4ac = 4.9484$ na FP com 5 dígitos, sem deslocar a virgula...
Prosseguindo $b^2 - 4ac = 10039$, depois teremos $\sqrt{b^2 - 4ac} = 100.19$. Notamos logo que $b^2 >> 4ac$ de quatro ordem de magnitude, portanto era esperado que $\sqrt{b^2 - 4ac} \approx |b|$.
Se usássemos o método 1:

$$\bar{x}_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{100.22 + 100.19}{2} = 100.2$$

$$\bar{x}_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{100.22 - 100.19}{2} = 0.015$$

É esperado ter um erro grande no calculo de x_2 sendo que fizemos uma subtração de dois valores similares, este é o caso 3 da slide anterior.

Erros, método 1

Se usarmos um computador (com mais dígitos) os resultados seriam $x_1 = 100.2076546$ e $x_2 = 0.012345364$. Notamos que temos um erro relativamente grande para o x_2!

$$E_R(x_2) = \frac{|x_2 - \bar{x}_2|}{|\bar{x}_2|} = 0.176976 \approx 18\%$$

Temos um erro relativo grande do 18% no calculo de x_2.
Em vez no calculo de x_1

$$E_R(x_1) = \frac{|x_1 - \bar{x}_1|}{|\bar{x}_1|} = 7.6393 * 10^{-5} \approx 0.0076\%$$

temos um erro relativo muito pequeno.
O método 1 é instável para resolver este problema do binômio.

Exemplo, método 2

Sempre com cinco dígitos significativos, usando o método 2 sendo que $b = -100.22 < 0$, computamos antes a raiz x_1 que não precisa de subtrações obtemos como antes $\bar{x}_1 = 100.2$, com
$E_R(x_1) = 0.0076\%$
x_2 é aproximada usando a relação $\bar{x}_2 = \dfrac{c}{ax_1}$ do que obtemos
$\bar{x}_2 = 0.012346$.
Observamos agora que conseguimos ter um erro relativo pequeno

$$\mathbf{E_R(x_2) = \frac{|x_2 - \bar{x}_2|}{|\bar{x}_2|} = 5.1515 * 10^{-5} \approx 0.0052\%}.$$

O método 2 é estável para resolver o problema do binômio.