Método direto de Eliminação de Gauss

MS211 – Cálculo Numérico

Giuseppe Romanazzi

26 Maio 2020

Introdução

Nesta aula apresentaremos um método que usa simples operações para transformar um sistema linear que admite uma solução num sistema triangular superior equivalente que admite a mesma solução. Este método é chamado Eliminação de Gauss. Vamos também analisar o seu custo computacional.

Sendo que sabemos resolver com um custo baixo (de ordem n^2) sistemas triangulares, veja aula anterior, este processo de transformação do sistema num sistema triangular superior permitirá de determinar a solução do sistema de partida com um custo baixo respeito por exemplo o método de Cramer (que tem custo exponencial $\approx n^n$)

Conteúdo

Sistemas equivalentes

Definição

Um sistema $Ax = b$ diz se equivalente ao sistema $By = c$ se os dois sistemas admitem a mesma solução.

Exemplo:
Os sistemas $Ax = b$, $-Ax = -b$, $0.5Ax = 0.5b$
são sistemas equivalentes.

Transformações em sistemas equivalentes

Existem principalmente três processos que transformam um sistema linear consistente num outro com a mesma solução.

1. Troca de equações do sistema. Por exemplo:

$$\begin{cases} 5x - 4y = -6 \\ 3x - 2y = -2 \end{cases} \tag{1}$$

e $\begin{cases} 3x - 2y = -2 \\ 5x - 4y = -6 \end{cases}$ tem a mesma solução $(x, y) = (2, 4)$

2. Multiplicação de uma equação por uma constante.
Por exemplo
$\begin{cases} 2.5x - 2y = -3 \\ 3x - 2y = -2 \end{cases}$ tem a mesma solução do problema (1),
porque a sua primeira equação é obtida multiplicando por 0.5 a primeira equação de (1).

Transformações em sistemas equivalentes

3) Adicionar um múltiplo de uma equação a uma outra equação. Por exemplo $\begin{cases} 5x - 4y = -6 \\ -7x + 6y = 10 \end{cases}$ tem a mesma solução do sistema (1). Isso porque notamos que a sua segunda equação é obtida do sistema (1) somando a segunda equação com a primeira equação multiplicada por -2, ou seja:

$$\text{segunda eq. do novo sistema} =$$
$$[\text{segunda eq. do sistema (1)}] - 2 * [\text{primeira eq. do sistema (1)}]$$

Transformação num sistema triangular superior

O objetivo do método de Eliminação de Gauss é de transformar o sistema de partida $Ax = b$, com $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ não singular, num sistema triangular superior equivalente do tipo $Ux = c$, para poder achar depois facilmente a solução de $Ax = b$ resolvendo somente o sistema $Ux = c$.
Este sistema será obtido usando uma sequencia de transformações do tipo 1, 2, 3 vistas nas duas slides anteriores.

A ideia base é de transformar o sistema anulando em cada passo os elementos de uma coluna por baixo da diagonal até chegar a um sistema equivalente triangular superior.

Primeiro passo do método de eliminação de Gauss

Dado o sistema $Ax = b$ de dimensão n, denotado com

$$A^{(0)}x = b^{(0)} \tag{p0}$$

vamos construir um sistema equivalente $A^{(1)}x = b^{(1)}$ que tem a matriz dos coeficientes $A^{(1)}$ com elementos nulos na primeira coluna por baixo da diagonal ou seja com $a_{i1}^{(1)} = 0, i = 2, \ldots, n$.
O novo sistema equivalente $A^{(1)}x = b^{(1)}$ é obtido subtraindo as equações $i = 2, \ldots, n$, a primeira equação de $A^{(0)}x = b^{(0)}$ multiplicada por $m_{i1} := \frac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}$, ou seja ,

por cada $i = 2, \ldots, n$

$$\text{eq. i do novo sistema} = \\ [\text{eq. i do sistema (p0)}] - m_{i1} * [\text{primeira eq. do sistema (p0)}]$$

Em vez a primeira equação de (p0) não é modificada.

Primeiro passo do método de eliminação de Gauss

Este primeiro passo permite de construir a partir da estrutura algébrica $(A^{(0)}|b^{(0)})$ a estrutura $(A^{(1)}|b^{(1)})$ do novo sistema, onde os elementos da matriz $A^{(1)}$ e do vetor $b^{(1)}$ são

$$\begin{array}{lll} a_{1j}^{(1)} = a_{1j}^{(0)}, & b_1^{(1)} = b_1^{(0)} & j = 1, \ldots, n; \\ a_{ij}^{(1)} = a_{ij}^{(0)} - m_{i1} a_{1j}^{(0)}, & b_i^{(1)} = b_i^{(0)} - m_{i1} b_1^{(0)} & i = 2, \ldots, n \; j = 1, \ldots, n \end{array}$$

onde $m_{i1} = \dfrac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}$. Note que das equações em cima

- $a_{i1}^{(1)} = a_{i1}^{(0)} - \dfrac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} a_{11}^{(0)} = 0$ por $i = 2, \ldots, n$, portanto os elementos da primeira coluna de $A^{(1)}$por baixo da diagonal são nulos.
- Para poder definir m_{i1} estamos supondo que $a_{11}^{(0)} \neq 0$. Se este elemento for nulo será suficiente encontrar um coeficiente da primeira coluna de $A^{(0)}$ que que seja não nulo, e depois temos de trocar a primeira linha com a linha de A associada a este coef. não nulo. Este valor não nulo tem de existir porque A é não singular.

Primeiro passo do método de eliminação de Gauss

O primeiro passo gera portanto o sistema

$$A^{(1)}x = b^{(1)} \tag{p1}$$

com

$$(A^{(1)}|b^{(1)}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} & b_1^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{array}\right)$$

Segundo passo do método de eliminação de Gauss

No segundo passo obtemos o sistema $A^{(2)}x = b^{(2)}$ equivalente ao sistema (p1), que tem a matriz dos coeficientes $A^{(2)}$ com valores nulos por baixo da diagonal na segunda coluna, ou seja com $a_{i2}^{(2)} = 0$ por $i = 3, \ldots, n$.
Este sistema será obtido subtraindo as linhas $i = 3, \ldots, n$ a segunda linha multiplicada por $m_{i2} = \dfrac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$, ou seja, por $i = 3, \ldots, n$ temos

$$\text{eq. i do novo sistema} =$$
$$[\text{eq. i do sistema (p1)}] - m_{i2} * [\text{segunda eq. do sistema (p1)}]$$

As primeira duas equações de (p1) ficam em vez invariadas.

Segundo passo do método de eliminação de Gauss

Os elementos da matriz $A^{(2)}$ e do vetor $b^{(2)}$ são

$$\begin{array}{lll} a_{\ell j}^{(2)} = a_{\ell j}^{(1)} & b_{\ell}^{(2)} = b_{\ell}^{(1)} & \ell = 1, 2;\ j = 1, \ldots, n; \\ a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - m_{i2} a_{2j}^{(1)}, & b_{i}^{(2)} = b_{i}^{(1)} - m_{i2} b_{2}^{(1)} & i = 3, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, n \end{array}$$

onde $m_{i2} = \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$. Note que das equações em cima

- $a_{i2}^{(2)} = a_{i2}^{(1)} - \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} a_{22}^{(1)} = 0$ por $i = 3, \ldots, n$, portanto os elementos da segunda coluna de $A^{(2)}$por baixo da diagonal são nulos. Claramente também $a_{i1}^{(2)} = a_{i1}^{(1)} - \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} a_{21}^{(1)} = 0$ sendo que $a_{i1}^{(1)} = 0$ por $i = 3, \ldots, n$ e $a_{21}^{(1)} = 0$
- Estamos supondo que $a_{22}^{(1)} \neq 0$ para poder definir m_{i2}. Se este elemento for nulo será suficiente encontrar pelo menos uma linha de $A^{(1)}$ que tem o segundo elemento não nulo. Este valor tem de existir porque a matriz $A^{(1)}$ é não singular, sendo que o sistema (p1) é equivalente a (p0) que admite solução.

Segundo passo do método de eliminação de Gauss

O segundo passo gera portanto o sistema

$$A^{(2)}x = b^{(2)} \tag{p2}$$

com

$$(A^{(2)}|b^{(2)}) = \left(\begin{array}{cccccc|c} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \cdots & \cdots & a_{1n}^{(0)} & b_1^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & \cdots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} & b_3^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{array}\right)$$

Passo k geral do método

Indo em frente no método, depois $k-1$ passos obteremos o sistema

$$A^{(k-1)}x = b^{(k-1)}$$

com a matriz $A^{(k-1)}$ que terá elementos nulos por baixo da diagonal nas primeiras $k-1$ colunas, e para transformar ele num sistema com matriz $A^{(k)}$ com elementos nulos também na coluna k por baixo da diagonal,
temos **no passo** k subtrair às linhas $i = k+1, \ldots, n$ a linha k de $A^{(k-1)}$ multiplicada por $m_{ik} = \dfrac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}$ e assim obteremos o sistema equivalente

$$A^{(k)}x = b^{(k)} \qquad \text{(pk)}$$

com ...

Passo k geral do método

$$(A^{(k)}|b^{(k)}) = \left(\begin{array}{cccccc|c} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n}^{(0)} & b_1^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & a_{k+1\ k+1}^{(k)} & \cdots & a_{k+1n}^{(k)} & b_{k+1}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & a_{n\ k+1}^{(k)} & \cdots & a_{nn}^{(k)} & b_n^{(k)} \end{array}\right)$$

Note que temos anulado k colunas por baixo da diagonal depois k passos.
Os coeficientes da matriz e do vetor independentes são dados na próxima slide

Passo k geral do método, coeficientes

Os coeficientes da matriz $A^{(k)}$ e do vetor independentes $b^{(k)}$ são, por $j = 1, \ldots, n$

$$\begin{array}{lll} a_{\ell j}^{(k)} = a_{\ell j}^{(k-1)}, & b_{\ell}^{(k)} = b_{\ell}^{(k-1)} & \ell = 1, \ldots, k \\ a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k)} - m_{ik} a_{kj}^{(k-1)}, & b_{i}^{(k)} = b_{i}^{(k-1)} - m_{ik} b_{k}^{(k-1)} & i = k+1, \ldots, n. \end{array} \tag{2}$$

onde $m_{ik} = \dfrac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}$.

Passo final $n-1$ do método

Sendo que em cada passo eliminamos os elementos de uma coluna, para eliminar todos aqueles por baixo da diagonal precisamos fazer $n-1$ passos com operações do tipo (2) (veja slide anterior). Assim **depois** $n-1$ **passos obtemos um sistema triangular superior equivalente ao sistema inicial** $Ax = b$ que é

$$A^{(n-1)}x = b^{(n-1)}$$

com

$$(A^{(n-1)}|b^{(n-1)}) = \left(\begin{array}{cccccc|c} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n}^{(0)} & b_1^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{kk}^{(k-1)} & \cdots & a_{kn}^{(k-1)} & b_k^{(k-1)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & 0 & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{nn}^{(n-1)} & b_n^{(n-1)} \end{array}\right)$$

Algoritmo do método de eliminação de Gauss

Require: n, $A = (a_{ij})$, $b = (b_i)$
  for $k = 1, \ldots, n-1$ **do**
    for $i = k+1, \ldots, n$ **do**
      $m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}$; ▷ 1 divisão
      $b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - m_{ik} b_k^{(k-1)}$; ▷ 1 soma e 1 produto
      for $j = k+1, \ldots, n$ **do**
        $a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - m_{ik} a_{kj}^{(k-1)}$ ▷ 1 soma e 1 produto
      end for
    end for
  end for

Algoritmo do método de eliminação de Gauss

- Note que no algoritmo, o ciclo **for** automaticamente incrementa o relativo índex.
- Na atualização da $a_{ij}^{(k)}$ desconsideremos as primeira k colunas sendo que sabemos, das contas descritas anteriormente, que são nulas. Este fato permite nos de um lado de poupar operações e de outro de não ter erros de cancelamento subtrativo no código associado. Cada vez que já se conhece um valor teórico de um qualquer método é bom evitar ao algoritmo de fazer estes operações.

Algoritmo otimizado no uso da memoria

Require: n, $A = (a_{ij})$, $b = (b_i)$
  for $k = 1, \dots, n-1$ **do**
    for $i = k+1, \dots, n$ **do**
      $m = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}$;
      $a_{ik} \leftarrow m$; ▷ Poderíamos por $a_{ik} = 0$ mas é preferível $a_{ik} \leftarrow m$ para gravar todos os m_{ik} que vão ser uteis para determinar a fatoração LU de A
      $b_i = b_i - mb_k$;
      for $j = k+1, \dots, n$ **do**
        $a_{ij} = a_{ij} - m \cdot a_{kj}$
      end for
    end for
  end for

Este algoritmo permite de gravar todos os passos na mesma estrutura $(A|b)$ sem necessidade de ocupar nova memoria respeito aquela disponível no input. Este pode ser feito sempre que não precisarmos de reutilizar sucessivamente os dados de input A e b.

Custo Computacional do método de eliminação de Gauss

Note que em cada um dos $n-1$ macro-passos k:
temos $(n-k)$ iterações no ciclo **for** $i = k+1, \ldots, n$ e em cada uma destes iterações temos $(n-k)$ iterações no ciclo **for** $j = k+1, \ldots, n$.
Neste ultimo ciclo em j temos em cada iteração 2 operações, assim em total no ciclo **for** $j = k+1, \ldots, n$ temos $2(n-k)$ operações. No ciclo **for** $i = k+1, \ldots, n$ temos em cada iteração, além destes $2(n-k)$, também 3 outras operações (1 divisão, 1 produto e 1 soma), assim podemos dizer de ter totalmente $2(n-k+1)+1$ operações em cada iteração i do ciclo **for** $i = k+1, \ldots, n$.
Podemos concluir que o numero total das operações é

$$\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=k+1}^{n} [2(n-k+1)+1]$$

Custo Computacional do método de eliminação de Gauss

$$\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=k+1}^{n} [2(n-k+1)+1] = \sum_{k=1}^{n-1} [\sum_{i=k+1}^{n} 1 + 2\sum_{i=k+1}^{n} (n-k+1)] =$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} [(n-k) + 2\sum_{i=k+1}^{n} (n-k+1)] = \sum_{k=1}^{n-1} [(n-k) + 2(n-k+1)(n-k)] =$$

$$\sum_{\ell=1}^{n-1} \ell + 2\sum_{\ell=1}^{n-1} (\ell+1)\ell, \text{ onde } \ell = n-k.$$

Agora usando a regra de Gauss $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{n-1} \ell = \frac{n(n-1)}{2}$, e que

$\displaystyle\sum_{\ell=1}^{n-1} \ell^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$ obtemos que o custo computacional do

método é $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{n-1} \ell + 2\sum_{\ell=1}^{n-1} (\ell+1)\ell = \frac{n(n-1)}{2} + 2\frac{n^3-n}{3} = \frac{2}{3}n^3 + \frac{n^2}{2} - \frac{7}{6}n.$

Então o custo computacional do método de eliminação direta de Gauss é da ordem $O(n^3)$.

Exemplo de aplicação do método

Desejamos resolver o sistema

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 & = & 1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 & = & -4 \\ -5x_1 + \frac{3}{2}x_2 + x_3 & = & \frac{5}{2} \end{cases}$$

Primeiro verificamos se o sistema admite solução única. Sendo que $\det(A) = 2 - 10 + 3 + 10 + 6 + 1 = 12 \neq 0$ então o sistema é consistente e admite uma única solução. Observamos que o sistema tem a matriz A e b de dimensão $n = 3$ portanto são esperados somente $n - 1 = 2$ passos da eliminação de Gauss.
A matriz A e o termo b serão indicado com $A^{(0)}$ e $b^{(0)}$ respetivamente

$$(A^{(0)}|b^{(0)}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -4 \\ -5 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{5}{2} \end{array}\right)$$

Exemplo de aplicação do método, Primeiro passo $k = 1$

Usando $(A^{(0)}|b^{(0)}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -4 \\ -5 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{5}{2} \end{array}\right)$ geramos os m_{i1} com $i = 2, 3$ para poder anular os termos a_{i1}, sendo que $a_{11} \neq 0$ não precisamos trocar alguma linha. Obtemos $m_{21} = \frac{a_{21}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} = \frac{1}{2}$, $\quad m_{31} = \frac{a_{31}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} = -\frac{5}{2}$. Usamos m_{21} para gerar a linha 2 de $A^{(1)}$ e $b^{(1)}$:

$$a_{22}^{(1)} = a_{22}^{(0)} - m_{21} a_{12}^{(0)} = 1 - \tfrac{1}{2}(-1) = \tfrac{3}{2}; \qquad a_{23}^{(1)} = a_{23}^{(0)} - m_{21} a_{13}^{(0)} = -2 - \tfrac{1}{2}(2) = -3$$
$$b_2^{(1)} = b_2^{(0)} - m_{21} b_1^{(0)} = -4 - \tfrac{1}{2}(1) = -\tfrac{9}{2}.$$

Usamos m_{31} para gerar a linha 3 de $A^{(1)}$ e $b^{(1)}$:

$$a_{32}^{(1)} = a_{32}^{(0)} - m_{31} a_{12}^{(0)} = \tfrac{3}{2} + \tfrac{5}{2}(-1) = -1; \quad a_{33}^{(1)} = a_{33}^{(0)} - m_{31} a_{13}^{(0)} = 1 + \tfrac{5}{2}(2) = 6;$$
$$b_3^{(1)} = b_3^{(0)} - m_{31} b_1^{(0)} = \tfrac{5}{2} + \tfrac{5}{2}(1) = 5.$$

Exemplo de aplicação do método, Segundo passo $k = 2$

Do primeiro passo obtemos então o sistema com matriz e termo independente $(A^{(1)}|b^{(1)}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & -3 & -\frac{9}{2} \\ 0 & -1 & 6 & 5 \end{array}\right)$ Agora usando a $m_{32} = \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} = -\frac{2}{3}$ no segundo passo anularemos os elementos (que é só a_{32}) por baixo da segunda coluna:

$$a_{33}^{(2)} = a_{33}^{(1)} - m_{32}a_{23}^{(1)} = 6 + \tfrac{2}{3}(-3) = 4; \quad b_3^{(2)} = b_3^{(1)} - m_{32}b_2^{(1)} = 5 + \tfrac{2}{3}(-\tfrac{9}{2}) = 2.$$

O sistema final triangular superior será $A^{(2)}x = b^{(2)}$, com $(A^{(2)}|b^{(2)}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & -3 & -\frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{array}\right).$

Exemplo, resolução do sistema triangular superior final

O sistema final $A^{(2)}x = b^{(2)}$ resulta ser portanto

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1 \\ \tfrac{3}{2}x_2 - 3x_3 &= -\tfrac{9}{2} \\ 4x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Se resolvemos este sistema usando o método descrito na aula anterior teremos começando da última equação

$$\begin{aligned} &4x_3 = 2 \longrightarrow x_3 = \tfrac{1}{2} \\ &\tfrac{3}{2}x_2 - 3x_3 = -\tfrac{9}{2} \longrightarrow x_2 = \frac{-\frac{9}{2}+3x_3}{\frac{3}{2}} = \frac{-\frac{9}{2}+\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}} = -2 \\ &2x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \longrightarrow x_1 = \frac{1+x_2-2x_3}{2} = -1 \end{aligned}$$

A solução é portanto $(x_1, x_2, x_3) = (-1, -2, \dfrac{1}{2})$.
Com uma simples verifica podemos também confirmar que esta é a solução do sistema de partida $Ax = b$.