

1 Exercícios para a véspera da P2

OBS: Primeiro tente fazer sozinho.

Exercício 1.1. Prove o Princípio da casa dos pombos generalizado: Se n gaiolas são ocupadas por $nk + 1$ pombos, então pelo menos uma gaiola deverá conter pelo menos $k + 1$ pombos.

Exercício 1.2. Prove que numa festa de aniversário com 37 crianças, pelo menos 4 nasceram no mesmo mês.

Exercício 1.3. Mostre que todo inteiro positivo n possui um múltiplo que se escreve na base 10 somente com os dígitos 0 e 1.

Exercício 1.4. Prove que toda sequência de $n^2 + 1$ inteiros diferentes possui uma subsequência crescente de $n + 1$ termos ou subsequência decrescente de $n + 1$ termos.

Exercício 1.5. Dados 8 números inteiros mostre que existem dois deles cuja diferença é divisível por 7.

Exercício 1.6. Numa família formada por 5 pessoas a soma das idades é de 245. Prove que podem ser selecionados 3 membros da família cujas somas das idades não é menor que 147.

Exercício 1.7. Verdadeiro ou Falso? (Tem sempre que justificar o motivo)

- Existe um grafo com 6 vértices e o grau dos vértices é 0, 2, 2, 2, 1, 1.
- Existe um grafo conexo de 8 vértices e com grau dos vértices 0, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 2.
- Existe um grafo com 5 vértices e graus: 3, 3, 3, 2, 2,.
- Existe um grafo com 6 nós, duas componentes conexas e

Exercício 1.8. O número de nós de grau ímpar de um grafo é par.

Exercício 1.9. Prove o teorema de Euler: Num grafo conexo existe um caminho fechado passando por todas as arestas apenas uma vez se, e somente se, o grau de cada nó é par.

Exercício 1.10. Maria sai de casa para fazer uma caminhada, mas ela deseja fazer um percurso que passe por todas as pontes de sua cidade. As pontes conectam 6 regiões distintas da cidade (seriam os nós) e as pontes as arestas. Sabendo que os nós possuem grau 3, 3, 2, 2, 2, 2, além disso cada ponte tem 100 metros e que as duas regiões (nós) de grau ímpar estão conectadas por uma ponte. Qual a quantidade mínima de metros que Maria deverá percorrer?

Exercício 1.11. Dê um exemplo de dois grafos que não são isomorfos, mas são conexos, tem 6 nós e a mesma quantidade de nós de cada grau.

Exemplo 1.1. Dê um exemplo de grafo que não seja planar.

Exercício 1.12. Estude os seguintes exemplos em que aparecem relações de recorrência:

- Cálculo do tamanho de uma população de coelhos;
- Divisão do plano por retas;
- Torre de hanoi;