Espaços Normados

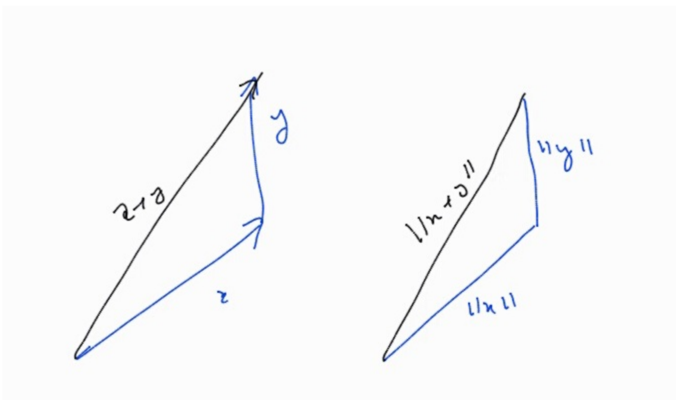
Definição: Uma norma $\|\cdot\|$ em um espaço vetorial X é uma função real em X com as seguintes propriedades:

i) $\|x\| \geq 0 \ \forall x \in X$.

ii) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

iii) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\| \ \forall x \in X$ e $\forall \alpha \in K$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

iv) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \ \forall x, y \in X$ (desigualdade triangular).



Um espaço vetorial + norma é chamado espaço normado.

Note que a norma em X induz uma métrica e X da forma

$$d(x, y) = \|x - y\| \ \ \forall x, y \in X. \tag{1}$$

Provemos a quarta propriedade da métrica, já que as outras três são imediatas. Para isto, temos

$$d(x, z) = \|x - z\| = \|x - y + y - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = d(x, y) + d(y, z). \tag{2}$$

Um espaço normado completo na métrica induzida pela norma é chamado espaço de Banach.

Note que a norma é uma função contínua de $(X, \|\cdot\|)$ em $\mathbb{R}$.

Demonstração: Para todo $x, y \in X$, temos

$$\|y\| \leq \|y - x + x\| \leq \|x\| + \|y - x\| \Rightarrow \|y\| - \|x\| \leq \|y - x\|. \tag{3}$$

Trocando os papéis de x e y chegamos em

$$|\|y\| - \|x\|| \leq \|y - x\|. \tag{4}$$

Portanto, dado $\epsilon > 0$, tome $\delta = y$. Se $d(x, y) = \|y - x\| < \delta$, então $|\|y\| - \|x\|| \leq \|y - x\| < \epsilon$.

Exemplo: $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$ com

$$\|x\| = \left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^2\right)^{1/2} \tag{5}$$

e

$$d(x,y)=\left(\sum_{j=1}^{n}|\xi_j-\eta_j|^2\right)^{1/2}. \tag{6}$$

Eles formam um espaço de Banach.

Exemplo: l^p, $1\leq p<\infty$ com

$$\|x\|=\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j|^p\right)^{1/p} \tag{7}$$

e

$$d(x,y)=\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j-\eta_j|^p\right)^{1/p}. \tag{8}$$

l^p é um espaço de Banach.

Exemplo: l^∞ com

$$\|x\|=\sup_{j\in\mathbb{N}}\{|\xi_j|\} \tag{9}$$

e

$$d(x,y)=\sup_{j\in\mathbb{N}}\{|\xi_j-\eta_j|\} \tag{10}$$

l^∞ é um espaço de Banach.

Exemplo: $C[a,b]$ com

$$\|x\|=\max_{t\in[a,b]}\{|x(t)|\} \tag{11}$$

e

$$d(x,y)=\max_{t\in[a,b]}\{|x(t)-y(t)|\}. \tag{12}$$

$C[a,b]$ é um espaço de Banach.

Exemplo: $(X,\|\cdot\|)$ espaço das funções contínuas em $[0,1]$ com a norma

$$\|x\|_2=\left(\int_0^1|x(t)|^2dt\right)^{1/2} \tag{13}$$

e

$$d(x,y)=\left(\int_0^1|x(t)-y(t)|^2dt\right)^{1/2}. \tag{14}$$

Vejamos que $(X,\|\cot\|)$ é espaço normado. Para isto, lembre que

$$AB\leq\frac{A^2}{2}+\frac{B^2}{2}. \tag{15}$$

Tome $A\equiv\frac{|x(t)|}{\|x\|_2}$ e $B\equiv\frac{|y(t)|}{\|y\|_2}$. Assim

$$\frac{|x(t)y(t)|}{\|x\|_2\|y\|_2}\leq\frac{1}{2}\frac{|x(t)|^2}{\|x\|_2^2}+\frac{1}{2}\frac{|y(t)|^2}{\|y\|_2^2}. \tag{16}$$

Itegrando de zero a um, temos

$$\frac{\int_0^1|x(y)y(t)|dt}{\|x\|_2\|y\|_2}\leq\frac{1}{2}+\frac{1}{2} \tag{17}$$

e chegamos na desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$\left|\int_0^1 x(t)y(t)dt\right| \leq \int_0^1 |x(t)y(t)dt| \leq \|x\|_2\|y\|_2. \tag{18}$$

Provemos agora a desigualdade de Minkowski, que diz

$$\|x+y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2. \tag{19}$$

Para isto,

$$|x(t)+y(t)|^2 = |x(t)+y(t)||x(t)+y(t)| \leq |x(t)||x(t)+y(t)| + |y(t)||x(t)+y(t)|. \tag{20}$$

Portanto, por Cauchy-Schwarz

$$\begin{gathered}\int_0^1 |x(t)||x(t)+y(t)|dt \leq \|x\|_2\|x+y\|_2 \\ \int_0^1 |y(t)||x(t)+y(t)|dt \leq \|y\|_2\|x+y\|_2\end{gathered} \tag{21}$$

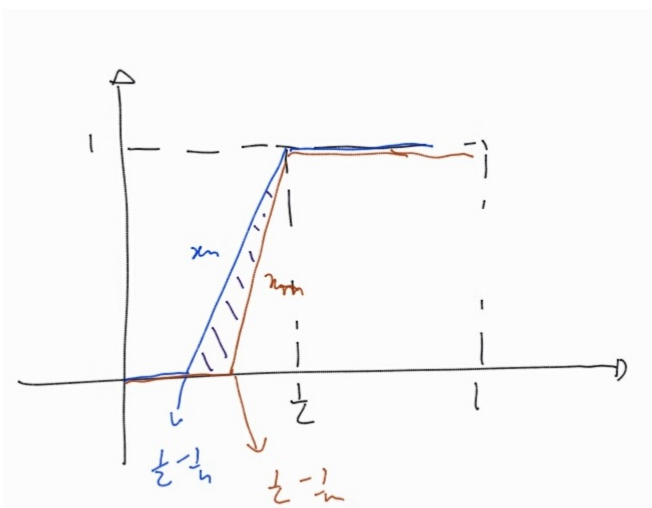
e assim

$$\|x+y\|_2^2 \leq (\|x\|_2 + \|y\|_2)(\|x+y\|_2) \Rightarrow \|x+y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2. \tag{22}$$

Afirmamos que este espaço métrico é incompleto. Para isto, tome a sequência de funções neste espaço

$$x_n(t) = \begin{cases} 0,\ t \in [0, 1/2 - 1/n] \\ n(t - 1/2 + 1/n),\ t \in (1/2 - 1/n, 1/2) \\ 1,\ t \in [1/2, 1]. \end{cases} \tag{23}$$

Temos assim, para $m > n$



$$\begin{aligned} &d(x_n, x_m)^2 = \int_0^1 |x_n(t) - x_m(t)|^2 dt = \\ &\int_{1/2-1/n}^{1/2-1/m} (n(t-1/2+1/n))^2 dt + \int_{1/2-1/m}^{1/2} [(n(t-1/2+1/n) - (m(t-1/2+1/m)]^2 dt \\ &= \frac{1}{3}(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}). \end{aligned} \tag{24}$$

Portanto $(x_n(t))$ é de Cauchy. Suponhamos que exista $x(t)$ contínua tal que $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_2^2 = 0$. Temos assim que

$$\int_0^{1/2-1/n} |x(t)|^2 dt + \int_{1/2-1/n}^{1/2} |n(t-1/2+1/n) - x(t)|^2 dt + \int_{1/2}^{11} |1 - x(t)|^2 dt \to 0. \tag{25}$$

Dessa forma, cada integral deve ir a zero e temos

$$x(t) = \begin{cases} 0, \ t \in [0, 1/2) \\ 1 \ t \in (1/2, 1]. \end{cases} \tag{26}$$

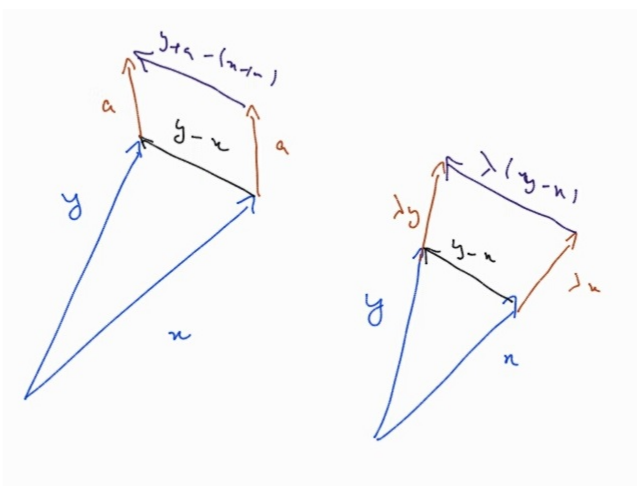
Logo $x(t)$ não pode ser contínua e, portanto $x_n(t)$ não converge. Logo o espaço é incompleto.

Lema: Se uma métrica d é induzida por uma norma em um espaço normado X, então:

i) $d(x+a, y+a) = d(x, y)$.

ii) $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| d(x, y)$.

Demonstração: $d(x+a, y+a) = \|x + a - (y+a)\| = \|x - y\| = d(x, y)$.
$d(\alpha x, \alpha y) = \|\alpha x - \alpha y\| = |\alpha| \|x - y\| = |\alpha| d(x, y)$.



Exemplo: No espaço s de todas as sequências reais ou complexas, a métrica

$$d(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{|\xi_j - \eta_j|}{1 + |\xi_j - \eta_j|} \tag{27}$$

não provém de uma norma. Para vermos isto, tome $x = (1, 0, 0, \dots)$ e $y = (0, 1, 0, \dots)$. Assim

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \frac{1}{2}\frac{1}{1+1} + \frac{1}{2^2}\frac{1}{1+1} = \frac{3}{8} \\ d(2x, 2y) &= \frac{1}{2}\frac{2}{1+2} + \frac{1}{2^j}\frac{2}{1+2} = \frac{1}{2} \neq 2d(x, y). \end{aligned} \tag{28}$$

Definição: Um subespaço $Y \subset X$ de um espaço normado X é um subespaço vetorial de X com a norma obtida pela restrição em Y. Se $Y \subset X$ é fechado em X é chamado subespaço fechado de X.

Teorema: Um subespaço Y de um espaço de Banach X é completo se, e somente se, Y é fechado em X.

Demonsrtação: Já vimos a demonstraçao em espaços métrico.

Teorema: Seja $(X, \|\cdot\|)$ espaço normado e $V \subset X$ subespaço próprio fechado de X. Então V é nunca denso. Ou equivalentemente, o complementar de V é aberto e denso.

Demonstração: Suponha que V tenha interior não vazio. Então existe $v \in V$ e $r > 0$ tal que $B(v;r) \subset V$. Logo, para qualquer $x \notin V$, temos

$$v + \frac{r}{2}\frac{x-v}{\|x-v\|} \in B(v;r), \tag{29}$$

pois

$$\left\| v + \frac{r}{2}\frac{x-v}{\|x-v\|} - v \right\| = \frac{r}{2}. \tag{30}$$

Mas

$$x = \frac{2}{r}\|x-v\| \left(v + \frac{r}{2}\frac{x-v}{\|x-v\|} \right) - \left(\frac{2}{r}\|x-v\| - 1 \right) v \in V, \tag{31}$$

já que V é fechado por combinações lineares. Esta contradição nos leva ao resultado esperado.