Espaços Vetoriais

Exemplo: $\mathbb{R}^n$ é um espaço vetorial com

$$x + y = (\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, \dots, \xi_n + \eta_n), \tag{1}$$

onde $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n), y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) \in \mathbb{R}^n$. Além disso

$$\alpha x = (\alpha\xi_1, \dots, \alpha\xi_n) \tag{2}$$

e $0 = (0, 0, \dots, 0)$.

Exemplo: l^p, $1 \leq p < \infty$ é um espaço vetorial com

$$x + y = (\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, \dots), \tag{3}$$

onde $x = (\xi_1, \xi_2, \dots), y = (\eta_1, \eta_2, \dots) \in l^p$. Além disso

$$\alpha x = (\alpha\xi_1, \alpha\xi_2, \dots) \tag{4}$$

e $0 = (0, 0, \dots)$. Note que se $x = (\xi_j), y = (\eta_j) \in l^p$, então $x + y \in l^p$ por Minkowski e, obviamente, $\alpha x \in l^p$.

Exemplo: l^∞ é um espaço vetorial com

$$x + y = (\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, \dots), \tag{5}$$

onde $x = (\xi_1, \xi_2, \dots), y = (\eta_1, \eta_2, \dots) \in l^\infty$. Além disso

$$\alpha x = (\alpha\xi_1, \alpha\xi_2, \dots) \tag{6}$$

e $0 = (0, 0, \dots)$. Note que se $x = (\xi_j), y = (\eta_j) \in l^\infty$, temos

$$\begin{aligned} |\xi_j| &\leq c_x \;\; \forall\, j \in \mathbb{N} \\ |\eta_j| &\leq c_y \;\; \forall\, j \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{7}$$

Logo

$$|\xi_j + \eta_j| \leq |\xi_j| + |\eta_j| \leq c_x + c_y \,\forall\, j\mathbb{N}, \tag{8}$$

o que implica que $x + y \in l^\infty$. Além disso

$$|\alpha\xi_j| = |\alpha| c_x \;\; \forall\, j \in \mathbb{N} \Rightarrow \alpha x \in l^\infty. \tag{9}$$

Exemplo: $C[a, b]$ é espaço vetorial com

$$\begin{aligned} &(x + y)(t) = x(t) + y(t) \\ &(\alpha x)(t) = \alpha x(t) \end{aligned} \tag{10}$$

e $0(t) = 0 : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $0(t) = 0$ para todo $t \in [a, b]$.

Combinação Linear: Dado $\{x_1, x_2, dots, x_n\} \subset X$, onde X é espaço vetorial. Dizemos que

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots \alpha_n x_n, \;\; \alpha_i' s \in K\, (\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}) \tag{11}$$

é combinação linear do vetores $x_1, \dots, x_n$.

Se $M \subset X$, o conjunto de todas as combinações lineares de vetores de M pé chamado span(M) e é subespaço vetorial de X.

Definição: X tem dimensão finita se existir n natural tal que X contém n vetores L.I. e qualquer conjunto de $n+1$ vetores é L.D.. Neste caso, $n = \dim(X)$. Caso contrário, X tem dimensão infinita.

Exemplo: $C[a,b]$ tem dimensão infinita, já que para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\{1, t, t^2, t^3, \dots, t^n\} \text{ é L.I..} \tag{12}$$

Exemplo: l^p tem dimensão infinita, já que para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\{(1,0,0,\dots),(0,1,0,\dots),\dots,(0,0,\dots,0,1,0,0,\dots)\} \text{ é L.I..} \tag{13}$$

Exemplo: $\mathbb{R}^n$ tem dimensão finita.

Definição: Se $\dim(X) = n$, então uma n-upla de vetores L.I. em X é chamada base de X. Se $\{e_1, \dots, e_n\}$ é base de X, então cada $x \in X$ tem representação úica da forma

$$x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n. \tag{14}$$

Definição (Base de Hamel): Uma base de Hamel do espaço vetorial X é um subconjunto $\{e_i\}_{i \in I}$ tal que todo $x \in X$ pode ser escrito de maneira única como

$$x = \sum_{j \in J} \alpha_j e_j \tag{15}$$

para algum subconjunto finito $J \subset I$, onde $\alpha_j \in K$, $j \in J$.

Definição (Ordem parcial): Seja $\mathcal{C} \neq \emptyset$ um conjunto. Uma ordem parcial em $\mathcal{C}$ é uma relação $\leq$ em $\mathcal{C}$ com as seguintes propriedades:

i) Reflexividade: $x \leq x \ \forall x$.

ii) Anti-simetria: Se $x \leq y$ e $y \leq x$, então $x = y$.

iii) Transitividade: Se $x \leq y$ e $y \leq z$, então $x \leq z$.

Uma ordem linear é uma ordem parcial $\leq$ em $\mathcal{C}$ que também satisfaz: Se $x, y \in \mathcal{C}$, então $x \leq y$ ou $y \leq x$.

Exemplo: Seja A um conjunto e $E = \mathcal{P}(A)$. Temos que E é parcialmente ordenado pela inclusão de conujuntos.

Exemplo: $\mathbb{R}$ é linearmente ordenado com a relação $\leq$.

Lema de Zorn: Se E é um conjunto parcialmente ordenado e todo subconjunto linearmente ordenado de E possui um limite superior, então E possui um elemento maximal.

Teorema: Too espaço vetorial $X \neq \{0\}$ possui uma base de Hamel.

Demonstração: Seja S o conjuntos dos conjuntos L.I. em X. Como $X \neq \{0\}$, um $v \neq 0$ é L.I., logo $\{v\} \in S$ e portanto $S \neq \emptyset$. Dados dois conjuntos L.I. L e L', dizemos que $L \leq L'$ se $L \subset L'$ (ordem parcial em S). Além disso, qualquer subconjunto de um conjunto L.I. é L.I.. Logo, se $L \in S$ e $L' \subset L$, então $L' \in S$.

Assuma que $\{L_\alpha\}_{\alpha \in A}$ é um conjunto linearmente ordenado em S. Então, dados L_α e L_β, temos $L_\alpha \subset L_\beta$ ou $L_\beta \subset L_\alpha$. Vejamos que $L = \cup_{\alpha \in A} L_\alpha$ é um limite superior para os $L'_\alpha s$ em S.

1) $L = \cup_{\alpha \in A} L_\alpha$ é L.I.

   Sejam $v_1, \dots, v_n$ em L. Então cada $v_k \in L_{\alpha_k}$ ($v_1 \in L_{\alpha_1}$, $v_2 \in L_{\alpha_2}$, $\dots$, $v_n \in L_{\alpha_n}$). Como $\{L_\alpha\}_{\alpha \in A}$ é linearmente ordenado, algum $L_{\alpha_1}, \dots, L_{\alpha_n}$ contém os outro. Portanto $v_1, \dots, v_n$ pertencem a um L_α comum, o que implica que $v_1, \dots, v_n$ é L.I..

2) $L = \cup_{\alpha \in A} L_\alpha$ é limite superior.

$L_\alpha \subset L$ para todo α.

Pelo Lema de Zorn, S contém um elemento maximal B. Vejamos que $\text{span}B = X$. Para isto, seja $W = \text{span}B$ e suponhamos que $W \neq X$. Seja $v \in X$ com $v \neq W$. Então B é subconjunto próprio de $B \cup \{v\}$. Mas $B \cup \{v\}$ é L.I., pois caso contrário existiria combinação linear

$$\sum_{i=1}^{k} c_i v_i = 0, \tag{16}$$

com nem todos os $c_i's$ nulos e com os $v_i's$ retirados de $B \cup \{v\}$. Como os elementos de B são L.I., um dos coeficientes não nulos deve ser de v. Suponha $v_k = v$ com $c_k \neq 0$. evemos ter $k \geq 2$, pois caso contrário $cv = 0$ (impossível pois $v \neq 0$). Logo

$$c_k v = -\sum_{i=1}^{k-1} c_i v_i \Rightarrow v = -\sum_{i=1}^{k-1} \frac{c_i}{c_k} v_i \Rightarrow v \in W. \tag{17}$$

Mas $v \notin W$ (contradição). Portanto $B \cup \{v\}$ é L.I.. Mas isto contradiz o fato de B ser maximal e, portanto, $W = \text{span}B = X$. B é a base de Hamel para X.