# Teorema de Baire

**Definição:** Um conjunto $A$ é dito nunca denso em $X$ quando $\bar{A}$ não contém nenhuma bola, isto é, quando $\text{int}(A) = \emptyset$.

**Exemplo:** A união finita de retas no $\mathbb{R}^2$ é nunca denso.

**Exemplo:** $\mathbb{Z}$ é nunca denso em $\mathbb{R}$.

**Exemplo (Conjunto de Cantor):** Comece com o intervalo fechado $[0, 1]$. Remova o intervalo aberto $(1/3, 2/3)$ para obter dois intervalos fechados $[0, 1/3] \cup [2/3, 1]$. Remova o intevalo de meio de cada um desses intervalos para obter os quatro intervalos fechados $[0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1]$. Proceda assim indefinidamente. Se $C_n$ denota a união dos $2^n$ intervalos fechados de tamanho $\frac{1}{3^n}$ no $n$-ésimo passo, então $C = \cap_{n=1}^{\infty} C_n$ é fechado e chamdo de conjunto de Cantor. Como cada $C_n$ não contém nenhum intervalo de comprimento maior que $\frac{1}{3^n}$, segue que $C$ não contém nenhum intervalo, logo $C$ possui interior vazio e é, portanto, nunca denso.

**Definição:** $M \subset X$ é dito magro quando $M = \cup_{n=1}^{\infty} M_n$, tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, temos $\text{int}(\bar{M_n}) = \emptyset$.

**Exemplo:** A união $A$ de dois conjuntos nunca densos $A_1$ e $A_2$ é um conjunto nunca denso. Para isto, suponhamos o contrário, isto é, suponhamos que exista aberto $B \subset \bar{A} = \bar{A}_1 \cup \bar{A}_2$. Note que $B \subset \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2$, pois caso contrário, existe (sem perda de generalidade) $x \in B$ tal que $x \in \bar{A}_1$ e $x \notin \bar{A}_2$. Como $\bar{A}_2$ é fechado, existe bola aberta $B(x; \epsilon) \subset \bar{A}_2^C$, o que implica que $B(x; \epsilon) \subset \bar{A}_1$, o que contradiz o fato de $A_1$ ser nunca denso. Conluindo que $B \subset \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2$ e sabendo que $\text{int}(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2) = \text{int}(\bar{A}_1)\text{int}(\bar{A}_2)$, temos que $B = \emptyset$.

**Exemplo:** Entretanto, não é verdade que todo subconjunto magro $M \subset X$ tenha interior vazio. Tome $A \subset \mathbb{Q}$ qualquer. $A$ é magro, pois é a reunião enumerável dos seus pontos, cada um dos quais tem interior vazio em $\mathbb{Q}$. Mas $A$ não precisa ter interior vazio em $amthbbQ$. Isto pois $\mathbb{Q}$ não é completo.

**Exemplo:** Um ponto em um espaço métrico $X$ tem interior vazio se, se somente se, não é ponto isolado. logo, um conjunto enumerável $M \subset X$ é magro se, e somente se, nenhum dos seus pontos é isolado.

**Exemplo:** Uma reta no plano $\mathbb{R}^2$ é um subconjuntonnunca denso em $\mathbb{R}^2$. Toda reunião enumerável de retas é magra em $\mathbb{R}^2$.

**Teorema de Baire:** Todo espaço métrico completo $X$ não pode ser escrito como reunião enumerável de conjuntos nunca densos.

*Demonstração:* Suponha que $X = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$, onde $A_n$ é nunca denso para todo $n \in \mathbb{N}$.

1) Como $\bar{A}_1$ é nunca denso, temos $\bar{A}_1 \neq X$. Segue que existe bola aberta $B(x_1; r_1) \subset \bar{A}_1^C$.

2) Como $\bar{A}_2$ não contém nenhuma bola aberta, temos $\bar{A}_2^C \cap B(x_1; r_1) \neq \emptyset$ e é aberto. Portanto existe $B(x_2; r_2) \subset \bar{A}_2^C \cap B(x_1; r_1)$.

3) Continuando desta maneira, encontramos uma sequência de pontos

$$x_{n+1} \in B(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset \bar{A}_{n+1}^C \cap B(x_n; r_n). \tag{1}$$

A cada passo, escolha

a) $r_n \leq 1/n$ (de modo que $r_n \to 0$ quando $n \to \infty$).

b) $r_{n+1} < r_n - d(x_n, x_{n+1})$ (de modo que se $z \in B[x_{n+1}; r_{n+1}]$, então $d(z, x_n) \leq d(z, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_n) < r_n - d(x_n, x_{n+1}) + d(x_n, x_{n+1}) = r_n$, isto é, $B[x_{n+1}, r_{n+1}] \subset B(x_n; r_n)$).

Note que $(x_n)$ é de Cauchy, pois para todo $m > n$, temos

$$x_n \in B_{r_m} \subset B_{r_{m-1}} \subset \cdots \subset B_{r_n} \Rightarrow d(x_m, x_n) < 2r_n \to 0 \text{ quando } n \to \infty. \tag{2}$$

Suponha agora $x_n \to x$. Para todo $m > n$, temos $x_m \in B(x_{n+1;r_{n+1}})$ e tomando o limite $x_n \to x$, temos $x \in B[x_{n+1}; r_{n+1}] \subset B(x_n; r_n)$. Como isto vale para todo $n$, obtivemos

$$x \in \cap_{n=1}^{\infty} B(x_n; r_n) \subset \cap_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n^C = \left(\cup_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n\right)^C \subset (\cup_{n=1}^{\infty} A_n)^C \subset= X^C = \emptyset. \tag{3}$$

Contradição! Tendo constuído uma sequência de Cauchy que não converge, $X$ deve ser incompleto.

Outra versão do mesmo teorema é a seguinte:

**Proposição:** Seja $X$ espaço métrico completo. Se $F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_n \supset \cdots$ é uma sequência de fechados não vazios $F_n \subset X$, com o limite do diametro de $F_n$ indo a zero quando $n \to \infty$, então existe $a \in M$ tal que $\cap_{n=1}^{\infty} F_n = \{a\}$.

*Demonstração:* Para cada $n \in \mathbb{N}$, escolha $x_n \in F_n$. Isto define uma sequência $(x_n)$ em $X$ tal que $m, n > n_0 \Rightarrow x_m, x_n \in F_{n_0}$. Ora, para $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que o diametro de $F_{n_0} < \epsilon$, e portanto $(x_n)$ é de Cauchy em $X$. Seja $a = \lim_{n\to\infty} x_n$. Dado $p \in \mathbb{N}$, temos $x_n \in F_p$ para todo $n \geq p$, donde $a = \lim_{n\to\infty} x_n \in F_p$ para todo $p \in \mathbb{N}$, ou seja, $a \in \cap_{n=1}^{\infty} F_n$. Evidentemente não podem existir dois pontos $a \neq b$ nessa intersecção pois isso obrigaria $d(a, b) \leq$ diametro de $F_n$ para todo $n$. Logo $\{a\} = \cap_{n=1}^{\infty} F_n$.

**Teorema de Baire:** Seja $X$ espaço métrico completo. Toda intersecção enumerável de abertos densos é um subconjunto denso de $X$.

*Demonstração:* Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ subconjuntos abertos densos em $X$. Queremos provar que $\cap_{n=1}^{\infty} A_n$ é denso em $X$, isto é, qualquer bola aberta $B_1$ em $X$ contém algum ponto de $A$. Ora, como $A_1$ é aberto e denso, $B_1 \subset A_1$ é aberto e não vazio, logo contém uma bola aberta $B_2$, a qual podemos supor tão pequena que seu raio não exceda $1/2$ e seu fecho esteja contido em $B_1 \subset A_1$. Por sua vez, $A_2$ sendo aberto e denso, $B_2 \subset A_2$ é aberto e não vazio. Logo existe $B_3$, de raio inferior a $1/3$ com $\bar{B}_3 \subset A_2 \cap B_2$. Procedendo assim, obtemos uma sequência $\bar{B}_1 \supset \bar{B}_2 \supset \cdots \supset \bar{B}_n \supset \cdots$ com $\bar{B}_{n+1} \subset B_n \cap A_n$ e diametro de $B_n$ indo a zero. Então existe $a \in X$ (ver Proposição anterior) tal que $a \in \cap_{n=1}^{\infty} \bar{B}_n$. A relação $\bar{B}_{n+1} \subset B_n \cap A_n$, mostra que $a$ pertence a todos os $A_n$ (além de pertencer a $B_1$). Logo $a \in A \cap B_1$, como queríamos demonstrar.

**Exemplo:** Seja $C[a, b]$ o conjunto das funções contínuas $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ com a métrica da convergência uniforme. O conjunto das funções que não possuem derivada em ponto algum de $[a, b]$ é denso em $C[a, b]$.

*Demonstração:* Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos o conjunto

$$A_n = \left\{ f \in C[a, b] : \forall t \in [a, b], \text{ existe}\, h > 0\, \text{tal que} \left| \frac{f(t + h) - f(t)}{h} \right| > n \right\}. \tag{4}$$

Segue que se $f \in A_n$ para todo $n$, então $f$ não possui derivada em pro algum de $[a, b]$.

1) Cada $A_n$ [e aberto em $C[a, b]$. Para isto, seja $f \in A_n$. Para todo $t \in [a, b]$, existe $h > 0$ tal que

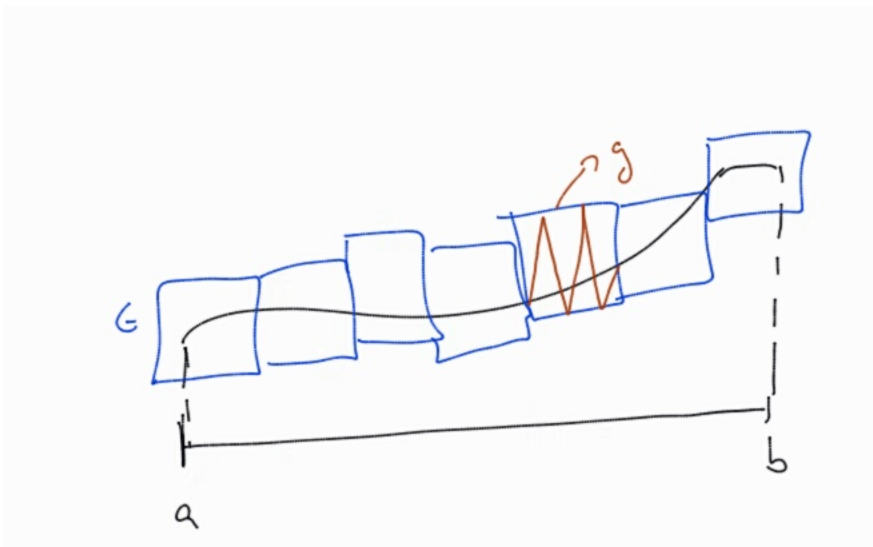
$$\xi(t, h) = |f(t + h) - f(t)| - n|h| > 0. \tag{5}$$

Mostremos que existe, na verdade, $\epsilon > 0$ tal que para todo $t \in [a, b]$, existe $h > 0$ com $\xi(t, h) > \epsilon$. Para isto, suponha o contrário. Então para cada $k \in \mathbb{N}$, existe algum ponto $t_k \in [a, b]$ tal que $\xi(t_k, h) \leq \frac{1}{k}$, seja qual for $h$. Como toda sequência em $[a, b]$ possui uma subsequência convergente, seja $t_{k_j} \to t_0 \in [a, b]$. Como $\xi$ é contúnua, concluímos que $\forall\ h$, $\xi(t_0, h) = \lim_{j\to\infty} \xi(t_{k_j}, h) \leq \lim_{j\to\infty} \frac{1}{k_j} = 0$, o que é uma contradição. Como existe tal $\epsilon > 0$, afirmamos que $d(f,g) < \epsilon/2$ implica $g \in A_n$. Com efeito, para todo $t \in [a,b]$, existe $h > 0$ tal que

$$\begin{aligned} n|h| + \epsilon < |f(t+h) - f(t)| &\leq |f(t+h) - g(t+h)| + |g(t+h) - g(t)| + |g(t) - f(t)| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + |g(t+h) - g(t)| + \frac{\epsilon}{2} \Rightarrow |g(t+h) - g(t)| > n|h| \Rightarrow g \in A_n. \end{aligned} \tag{6}$$

Logo $A_n$ é aberto.

2) Cada $A_n$ é denso em $C[a,b]$: Sabemos que toda função contínua $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é uniformemente convergente. logo, dado $\epsilon > 0$ e $f \in C[a,b]$, mostraremos que existe $g \in A_n$ tal que $d(f,g) < \epsilon$. Pela continuidade uniforme de $f$, existe $\delta > 0$ tal que $|x - y| < \delta$ implica $|f(x) - f(y) < \epsilon$. Divida o intervalo $[a,b]$ em subintervalos de comprimentos menores que $\delta$. o gráfico de $f$ em cada intervalo cabe em um retângulo de altura menor que $\epsilon$. Aproxime $f$ por $g \in A_n$ com inclinação sempre maior que $n$ como na figura.




Como $X$ é completo $\cap_{n=1}^{\infty} A_n$ é denso em $X$. Logo o conjunto $A \supset \cap_{n=1}^{\infty} A_n$ das funções que não possuem derivadas em ponto algum de $[a,b]$ é denso em $C[a,b]$.