Convergência

Definição: Uma sequência (x_n) em um espaço métrico $X = (X, d)$ é dita convergente se existe $x \in X$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0. \tag{1}$$

Escrevemos $x_n \to x$ ou $\lim_{n\to\infty} = x$. Se (x_n) não é convergente, é dita divergente.

Note que

$$(a_n) = (d(x_n, x)) \tag{2}$$

é uma sequência de numeros reais, cuja convergência define a convergência de (x_n).

Se $x_n \to x$, dado $\epsilon > 0$, existe $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que todo x_n, $n > N$, pertence à bola $B(x; \epsilon)$.

Exemplo: Seja $X = (0, 1) \subset \mathbb{R}$ com a métrica $d(x, y) = |x - y|$. Então a sequência $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right)$ não converge pois $0 \notin X$.

Dizemos que $M \subset X$ é limitado se seu diâmetro

$$\delta(M) = \sup_{x,y\in M} d(x, y) \tag{3}$$

é finito. Uma sequência (x_n) em (X, d) é limitada quando o conjunto dos seus pontos é limitado, isto é, quando existe $c > 0$ tal que $d(x_m, x_n) \leq c$ para todo $m, n \in \mathbb{N}$. Note que se M é limitado, $M \subset B(x_0; r)$, onde $x_0 \in X$ e r é suficientemente grade.

Lema: Se $A, B \subset X$ são limitados, então $A \cup B$ é limitado.

Demonstraçao: Fixemos um ponto $a \in A$ e um ponto $b \in B$. Então existe $c > 0$, tal que $d(x, a) \leq c$ e $d(y, b) \leq c$ para todo $x \in A$ e todo $y \in B$. Defina $k = 2c + d(a, b)$ e temos, para $x \in A$ e $y \in B$ arbitrários: $d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, b) + d(b, y) \leq c + d(a, b) + c = k$. A desigualdade $d(x, y) \leq k$ é evidente quando $x, y \in A$ ou $x, y \in B$. Logo vale $d(x, y) \leq k$ para x e y quaisquer em $A \cup B$. Isto mostra que $A \cup B$ é limitado.

Proposição: Toda sequência convergente é limitada.

Demonstração: Seja $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Tome $\epsilon = 1$ e obtemos $N \in \mathbb{N}$ tal que $n > N$ implica $n_n \in B(x; 1)$. Portanto o conjunto dos valores da sequência está contido na reunião $\{x_1, \dots, x_N\} \cup B(x; 1)$ de dois conjuntos limitados, logo é limitado.

Exemplo: A recíproca da proposição é falsa: tome a sequencia $(x_n) = ((-1)^n)$ de números reais. (x_n) é limitada, mas não convergente.

Exemplo: Dado um número real a, com $|a| > 1$, a sequência $x_n = a^n$ não converge pois não é limitada;

Proposição: Uma sequência não pode convergir para dois limites diferentes.

Demonstração: Seja (x_n) sequência em (X, d) e $a, b \in X$ tais que $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ e $\lim_{n\to\infty} x_n = b$. Dado $\epsilon > 0$, existe $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tais que se $n > N_1$ temos $d(x_n, a) < \epsilon$ e $n > N_2$ temos $d(x_n, b) < \epsilon$. Tome $N = \max\{N_1, N_2\}$. Então $n > N$ implica que

$$d(a, b) \leq d(a, x_n) + d(x_N, b) < 2\epsilon. \tag{4}$$

Logo

$$0 \leq d(a, b) < 2\epsilon \ \ \forall \epsilon > 0, \tag{5}$$

o que implica que $d(a, b) = 0$ e, portanto, $a = b$.

Exemplo: Se $\lim_{n\to\infty} = a$ e $x_n \neq a \forall n \in \mathbb{N}$, então a sequência (x_n) é divergete em $X - \{a\}$. Com efeito se existisse $b \in X - \{a\}$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = b$, então teríamos $a \neq b$ e a sequência teria dois limites distintos $a, b \in X$.

Proposição: Se $x_n \longrightarrow x$ e $y_n \longrightarrow y$ em (X,d), então $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) \longrightarrow d(x,y)$.

Demonstração: Temos

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x) + d(x, y) + d(y, y_n) \Rightarrow d(x_n, y_n) - d(x, y) \leq d(x_n, x) + d(y, y_n). \quad (6)$$

Trocando os papéis de x e y, concluímos que

$$|d(x_n, y_n) - d(x, y)| \leq d(x_n, x) + d(y, y_n) \longrightarrow 0 \quad (7)$$

quando $n \to \infty$. Logo $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(x, y)$.

Definição: Uma sequência (x_n) em $X = (X,d)$ é dita ser de Cauchy se $\forall \epsilon > 0$, existe $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_m, x_n) < \epsilon \;\; m, n > N. \quad (8)$$

O espaço X é dito completo se toda sequência de Cauchy converge em X.

Exemplo: A reta real é um espaço métrico completo.

Demonstração: Seja (x_n) sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tome $X_n = \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$. Temos $X_1 \supset X_2 \supset \cdots \supset X_n \supset \dots$ e os conjuntos x_n sao limitados já que (x_n) é de Cauchy. Seja $a = \inf X_n$, $n = 1, 2, \dots$. Então $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \cdots \leq b = \sup X_1$. Logo (a_n) é monótona e limitada e portanto convergente. Seja $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Mostremos que $\lim_{n\to} x_n = a$. Para isto, mostraremos que a é o limite de uma subsequência de (x_n) e como (x_n) é de Cauchy, converge para a. Dado $\epsilon > 0$ e $n_1 \in \mathbb{N}$, mostraremos que podemos obter $n \geq n_1$ tal que $x_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$. Ora, como $a = \lim_{n\to\infty} a_n$, existe $m > n_1$ tal que $a - \epsilon < a_m < a + \epsilon$. Como $a_n = \inf X_n$, existe $n > m$ (e, portanto $n > n_1$) tal que $a_m \leq x_n < a_m + \epsilon < a + \epsilon$, isto é, $a - \epsilon < x_n < a + \epsilon$, o que implica que $x_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$.

Exemplo: O plano complexo $\mathbb{C}$ é um espaço métrico completo.

Exemplo: $X = (0, 1]$ com a métrica usual é incompleto: Tome $(x_n) = (1/n)$. (x_n) é de Cauchy, mas não converge, pois $0 \notin X$.

Teorma: Toda sequência convergente em um espaço métrico é uma sequência de Cauchy.

Demonstração: Como $x_n \to x$, dado $\epsilon > 0$, existe $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_n, x) < \frac{\epsilon}{2} \;\; \forall n > N. \quad (9)$$

Dessa forma, para $m, n > N$, temos

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x, x_n) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \quad (10)$$

Logo, (x_n) é de Cauchy.

Teorema: Seja $M \subset (X,d)$ não vazio e $\bar{M}$ seu fecho; Então:

a) $x \in \bar{M}$ se, e somente se, existe (x_n) em M tal que $x_n \to x$..

b) M é fechado se, e somente se, $x_n \in M$, $x_n \to x$ implica $x_n \in M$.

Demonstração:

a) Seja $x \in \bar{M}$. Se $x \in M$, tome a sequência $(x, x, x, \dots)$. Se $x \notin M$, x é ponto de acumulação de M. Logo, para cada $n = 1, 2, \dots$, a bola aberta $B(x; 1/n)$ contém um ponto $x_n \in M$ e $x_n \to x$.

   Seja agora (x_n) em M com $x_n \to x$, então $x \in M$ ou toda vizinhança de x contém pontos $x_n \neq x$. Logo x é ponto de acumulação de M e, portanto, $x \in \bar{M}$.

b) Se M é fechado, $M = \bar{M}$, logo se $(x_n) \in M$ com $x_n \to x \in M$, temos $x \in \bar{M} = M$.

Seja $x \in \bar{M}$, então existe (x_n) em M tal que $x_n \to x$. Mas pela hipótese $x \in M$. Logo $x \in \bar{M}$, o que impica $x \in \bar{M}$, ou seja, $\bar{M} \subset M$, o que implica que M é fechado.

Teorema: Um subespaço M de um espaço métrico completo X é completo se, e somente se, M é fechado.

Demonstração: Seja $M \subset X$ completo. Pelo teorema anterior, para todo $x \in \bar{M}$, existe (x_n) em M tal que $x_n \to x$. Como (x_n) é de Cauchy e M é completo, temos $x \in M$. Logo $\bar{M} \subset M$, o que impica que M é fechado.

Suponha agora M fechado e em X e (x_n) sequência de Cauchy em M. Então $x_n \to x \in X$, pois X é completo e $x \in \bar{M}$ pelo teorema anterior. Como M é fechado, $x \in M$ e, portanto, M é completo.

Teorema: Um mapa $T : X \longrightarrow Y$ é contínuo em $x_0 \in X$ se, e somente se, $x_n \to x_0$ implica que $Tx_n \to Tx_0$.

Demonstração: Seja T mapa contínuo em $x_0 \in X$. Então dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $d(x, x_0) < \delta$ implica $d(Tx, Tx_0) < \epsilon$. Como $x_n \to x$, a partir de δ, obtemos $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_0) < \delta$ $\forall n > N$. Logo, dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_0) < \delta \Rightarrow d(Tx, Tx_0) < \epsilon$ $\forall n > N$. Logo $\lim_{n\to\infty} Tx_n = Tx_0$.

Suponha agora, T não é contíno em $x_0 \in X$. Então existe $\epsilon > 0$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos obter $x_n \in X$, com $d(x_n, x_0) < 1/n$ e $d(tx_n, Tx_0) < \epsilon$. Isto nos dá uma sequência (x_n) em X com $x_n \to x_0$ sem que $Tx_n \to Tx_0$.

Corolário: Para que $T : X \longrightarrow Y$ seja contínua em $x_0 \in X$ é sufuciente que $x_n \to x$ implique (Tx_n) convergente em Y.

Demonstração: A sequência $(z_n) = (x_1, x_0, x_2, x_0, x_3, x_0, \dots)$ converge para x_0. Logo $(Tz_n) = (Tx_1, Tx_0, Tx_2, Tx_0, \dots)$ convergente implica que $\lim_{n\to\infty} Tx_n = Tx_0$.

Exemplo: Sejam $f, g : X \longrightarrow Y$ contínuas. O conjunto F dos pontos $x \in X$ tais que $f(x) = g(x)$ é fechado em X. Com efeito, seja (x_n) sequência de pontos em F, com $\lim_{n\to\infty} x_n = a \in X$. Temos $f(x_n) = g(x_n)$ para todo n natural. Segue daí que

$$f(a) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(a). \tag{11}$$

Logo $a \in F$ e, portanto, F é fechado.