Espaços Métricos Separáveis

Exemplo: l^∞ não é separável.

Demonstração: Seja $y = (\eta_1, \eta_2, \dots)$ sequência de zeros e uns. Obviamente $y \in l^\infty$. Seja $\hat{y}$ o número real cuja representação binária tem a forma

$$\hat{y} = \frac{\eta_1}{2} + \frac{\eta_2}{2^2} + \frac{\eta_3}{2^3} + \dots. \tag{1}$$

Como $[0,1]$ não é enumerável e cada $\hat{y} \in [0,1]$ tem uma representação binária única, temos que existem incontáveis sequências de zeros e uns. Elementos distintos deste tipo possuem distância um. Se cada elemento deste tipo for o centro de uma bola de raio $1/3$, essas bolas não se interceptam e temos uma quantidade não enumerável delas. Se $\bar{M} = l^\infty$, cada bola deste tipo deve conter um elemento de M. Logo M não é enumerável. Portanto, l^∞ não possui subconjuntos densos enumeráveis e, portanto, não é separável.

Mostraremos que o espaço l^p, $1 \leq p < \infty$ é separável. Mas antes apresentaremos o axioma da escolha, que será necessário na demonstração que a reunião enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável. Utilizaremos este fato na demonstração de que l^p é separável.

Axioma da Escolha: Suponha que seja uma família de conjuntos $\{C_\alpha\}_{\alpha \in J}$ disjuntos e não vazios. Existe uma função $\varphi : \{C_\alpha\}_{\alpha \in J} \longrightarrow \cup_{\alpha \in J} C_\alpha$ tal que $\varphi(C_\alpha) \in C_\alpha$.

Teorema: O produto cartesiado de dois cojuntos enumeráveis é enumerável.

Demonstração: Sejam A, B conjuntos enumeráveis. Entao existe uma injeção f de A em $\mathbb{N}$ e uma injeção g de B em $\mathbb{N}$. Logo existe uma injeção h de $A \times B$ em $\mathbb{N}^2$ tal que

$$h(a,b) = (f(a), g(b)). \tag{2}$$

Considere agora a função $t : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ definida por $t(n,m) = 2^n 3^m$. Pelo teorema fundamental da aritmética, t é injeção, logo $\mathbb{N}^2$ é enumerável. Como a composição de injeções é injeção, temos que

$$t \circ h : A \times B \longrightarrow \mathbb{N} \tag{3}$$

é injeção, logo $A \times B$ é enumerável.

Teorema: A união enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável.

Demonstração: Seja $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de cojunto senumeráveis. Defina

$$S = \cup_{n \in \mathbb{N}} S_n. \tag{4}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $\mathcal{F}_n$ o conjunto de todas as injeções de S_n para $\mathbb{N}$. Como S_n é enumerável, $\mathcal{F}_n$ é não vazio. Pelo axioma da escolha, existe sequência $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $f_n \in \mathcal{F}_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Seja $\phi : S \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ o mapa definido por

$$\phi(x) = (n, f_n(x)), \tag{5}$$

onde n é o menor natural tal que $x \in S_n$ (pelo princípio da boa ordenação, que diz que todo subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$ possui um menor elemento, tal n existe). Logo o mapa ϕ existe.

Como cada f_n é uma injeção, ϕ é uma injeção. Logo, como $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável, temos que S é enumerável.

Podemos agora mostrar que l^p é separável.

Exemplo: l^p, $1 \leq p < \infty$ é separável.

Demonstração: Seja M o conjunto de todas as sequências da forma

$$y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n, \dots) \tag{6}$$

com $\eta_i's$ racionais. Note que

$$M = \cup_{n=1}^{\infty} M_n \tag{7}$$

com $M_n = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \cdots \times \mathbb{Q}$. Portanto M é enumerável.

Vejamos que $\bar{M} = l^p$. Para isso, seja $x = (\xi_j) \in l^p$ qualquer. Então para todo $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{j=N+1}^{\infty} |\xi_j|^p < \frac{\epsilon^p}{2}, \tag{8}$$

já que é o resto de uma série convergente.

Como $\bar{Q} = \mathbb{R}$, temos que para todo ξ_j tem um racional η_j perto dele. Logo, podemos encontrar $y = (\eta_1, \dots, \eta_N, 0, 0 \dots) \in M$ tal que

$$\sum_{j=1}^{N} |\xi_j - \eta_j|^p < \frac{\epsilon^p}{2}. \tag{9}$$

Portanto

$$[d(x,y)]^p = \sum_{j=1}^{n} |\xi_j - \eta_j|^p + \sum_{j=N+1}^{\infty} |\xi_j|^p < \frac{\epsilon^p}{2} + \frac{\epsilon^p}{2} = \epsilon^p, \tag{10}$$

o que implica que $d(x,y) < \epsilon$ e, portanto, M é denso em l^p.