Topologia dos espaços métricos

Para iniciarmos a discussão sobre a topologia dos espaços métricos, necessitamos da noção de bola aberta, bola fechada e esfera em um espaço métrico:

- Bola aberta de centro x_0 e raio r: É o conjunto de todos os pontos do espaço métrico X que estão a uma distância menor que r do ponto x_0, isto é,

$$B(x_0; r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}. \tag{1}$$

- Bola fechada de centro x_0 e raio r: É o conjunto de todos os pontos do espaço métrico X que estão a uma distância menor ou igual a r do ponto x_0, isto é,

$$B[x_0; r] = \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\}. \tag{2}$$

- Esfera de centro x_0 e raio r: É o conjunto de todos os pontos do espaço métrico X que distam r de x_0.

$$S(x_0; r) = \{x \in X : d(x, x_0) = r\}. \tag{3}$$

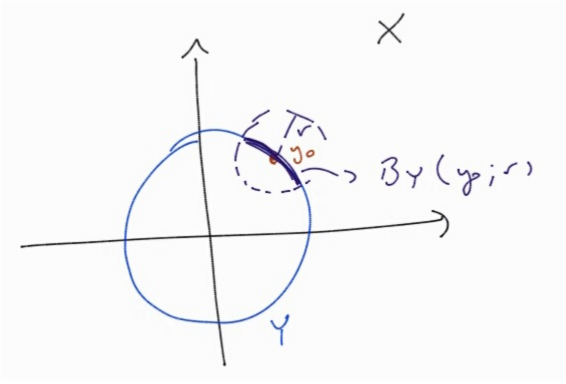
Note que $S(x_0; r) = B[x_0; r] - B(x_0; r)$ e $B[x_0; r] = B(x_0; r) \cup S(x_0; r)$.

Exemplo: Se X está munido com a métrica zero-um, então para todo $x_0 \in X$, temos

- $B(x_0; r) = B[x_0; r] = X$ se $r > 1$.
- $B(x_0; r) = B[x_0; r] = \{x_0\}$ se $r < 1$.
- $B(x_0; 1) = \{x_0\}$ e $B[x_0; 1] = X$.

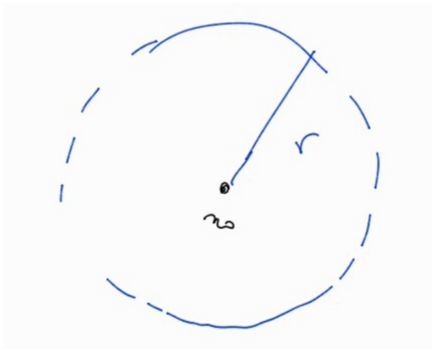
Logo, $S(x_0; r) = \emptyset$ se $r \neq 1$ e $S(x_0; 1) = X - \{x_0\}$.

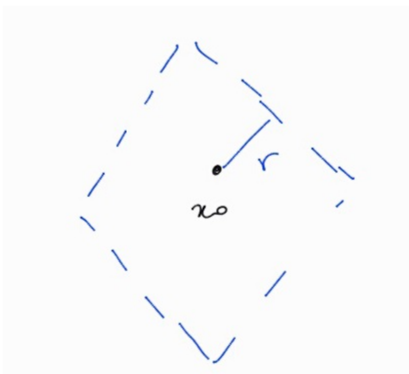
Exemplo: Seja Y subespaço de (X, d). Se $y_0 \in Y$ e $r > 0$, então $B_Y(y_0; r) = B_X(y_0; r) \cap Y$. Se $X = \mathbb{R}^2$ e $Y = S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$, temos que a bola aberta $B(y_0; r)$ é um arco de círculo cujo ponto médio é y_0.

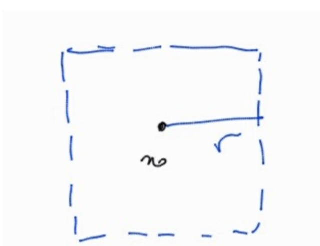


Exemplo: Em $\mathbb{R}^2$, temos

- $d(x, y) = \sqrt{(\xi_1 - \eta_1)^2 + (\xi_2 - \eta_2)^2}$







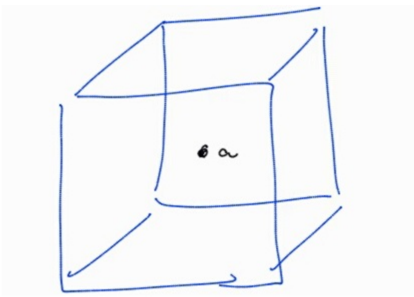
- $d'(x,y) = |\xi_1 - \eta_1| + |\xi_2 - \eta_2|$
- $d''(x,y) = \max\{|\xi_1 - \eta_1|, |\xi_2 - \eta_2|\}$

Exemplo: Em $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$, tomemos a métrica

$$d(x,y) = \max_{1 \leq \leq n} d(x_i, y_i). \tag{4}$$

Então $B(a;r) = B(a_1;r)\times\cdots\times B(a_n;r)$ e $B[a;r] = B[a_1;r]\times\cdots\times B[a_n;r]$, onde $a = (a_1, a_2 \ldots, a_n)$. Com efeito, dizer que $d(a,x) < r$ (ou $d(a,x) \leq r$) equivale a afirmar que $d(a_i,x_i) < r$ (ou $d(a_i,x_i) \leq r$) para todo $i = 1, 2, \ldots, n$.

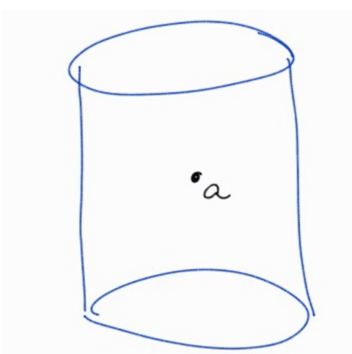
Em $\mathbb{R}^3$ podemos ter $R^3 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.



Podemos ter também $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, onde em R^2 temos a métrica Euclidiana. Dessa forma

$$d[(w,t),(w',t')] = \max\{d(w,w'), d(t,t')\}, \tag{5}$$

onde $w, w' \in \mathbb{R}^2$ e $t, t' \in \mathbb{R}$.



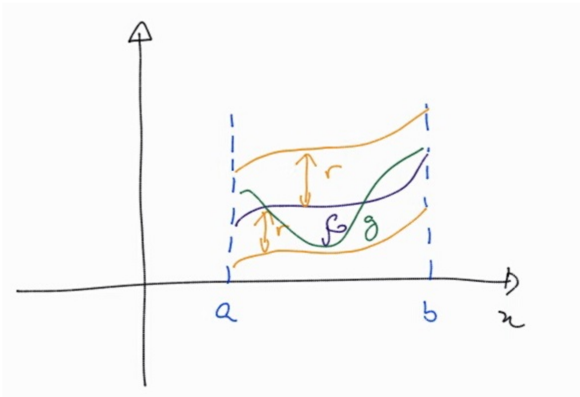
Exemplo: Em $\mathcal{B}([a,b];\mathbb{R})$ com

$$d(f,g) = \sup_{x\in[a,b]}\{|f(x) - g(x)|\}, \tag{6}$$

dado $f_0(x) \in \mathcal{B}([a,b];\mathbb{R})$, temos que g dado na figura pertence a $B(x_0;r)$.

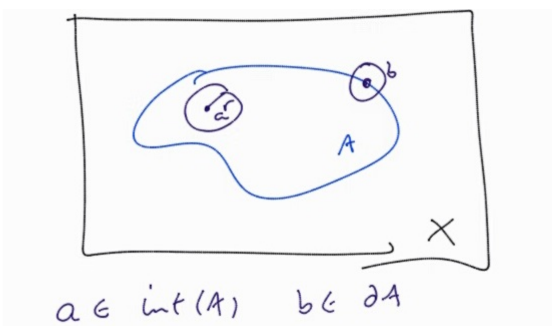
Entretanto é possível g estar na faixa $f(x)-r < y < f(x)+r$ sem que $g \in B(f;r)$. Tome $f(x) = 0$ em $[a,b]$, $g(x) = x$ em $[a,b)$ e $g(b) = 0$. Então temos $d(f,g) = \sup_{x\in[a,b]}\{|f(x) - g(x)|\} = b$. Então $|g(x) - f(x)| < b$ em $[a,b]$ sem que $g \in B(f;b)$.

Conjuntos aberto



Definição: Um ponto $x \in A \subset X$ é chamado ponto interior de A se existe $r > 0$ tal que $B(a; r) \subset A$. O conjunto de todos os pontos interiores de A é denotado por $\mathrm{int}(A)$.

Definição: A fronteira de $A \subset X$ é o conjunto ∂A, formado pelos pontos $x \in X$ tais que toda bola aberta centrada em x contém pelo menos um ponto de A e um ponto do complementar de A. Note que são conceitos relativos pela figura na próxima página.



Note que dado $A \subset X$, temos

$$X = \mathrm{int}(A) \cup \partial A \cup \mathrm{int}(X - A). \tag{7}$$

Exemplo: Se $X = \mathbb{R}$, $A = [0, 1)$. Então

$$\mathbb{R} = (0, 1) \cup \{0, 1\} \cup Y, \tag{8}$$

onde $Y = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

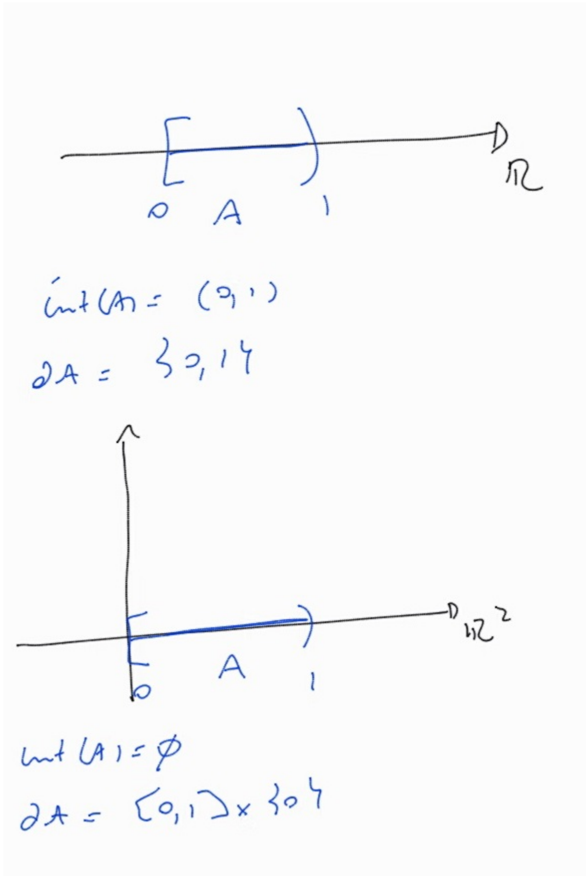
Definição: $A \subset X$ é dito aberto quando todos os seus pontos são interiores, isto é, $\mathrm{int}(A) = A$.

$A \cup X$ é aberto se, e somente se, $A \cap \partial A = \emptyset$.

Proposição: Em qualquer espaço métrico X, a bola aberta $B(x; r)$ é um conjunto aberto.

Demonstração: Seja $y \in B(x; r)$. Então $d(x, y) < r$ e portanto $s = r - d(x, y) > 0$. Afirmamos que $B(y; s) \subset B(x; r)$. De fato, se $z \in B(y; s)$, temos $d(y, z) < s$ e, portanto,

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < d(x, y) + s = d(x, y) + r - d(x, y) = r. \tag{9}$$



Logo $z \in B(x.r)$.

Corolário: Para todo $A \subset X$, $\mathrm{int}(A)$ é aberto.

Demonstração: Seja $x \in \mathrm{int}(A)$. Então existe $r > 0$ tal que $B(x;r) \subset A$. Para todo $y \in B(x;r)$, existe $s > 0$ tal que $B(y;s) \subset B(x;r) \subset A$. Logo todo ponto $y \in B(x;r)$ é ponto interior a A. Isso implica que $B(x;r) \subset \mathrm{int}(A)$. Logo $\mathrm{int}(A)$ é aberto.

Temos também que $\mathrm{int}(A)$ é o maior aberto contido em A. Além disso, dizemos que $V \subset X$ é vizinhança de $x \in X$ se $x \in V\mathrm{int}(V)$.

Mostraremos agora que todo espaço métrico é um espaço topológico, isto é, denote por τ a coleção de todos os conjuntos abertos em X. Então

i) $\emptyset \in \tau$ e $X \in \tau$.

ii) A reunião de uma familia arbitraria de membros de τ é um membro de τ.

iii) A intersecção finita de membros de τ é um membro de τ.

*Demonstração:*i) $\emptyset$ é aberto pois não possui elementos e X é obviamente aberto.

ii) Se $x \in \cup_{\lambda \in L} A_\lambda$, com $A_\lambda \in \tau$, então $x \in A_{\lambda_0}$ para algum $\lambda_0 \in L$. Como A_{λ_0} é aberto, existe bola aberta $B(x;\epsilon)$ contida em A_{λ_0}. Logo $B(x;\epsilon) \subset A_{\lambda_0} \subset \cup_{\lambda \in L} A_\lambda$.

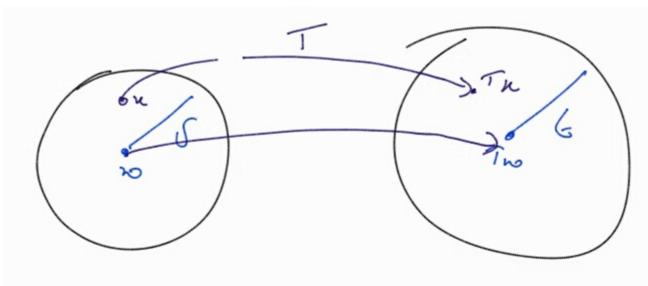
iii) Se $x \in \cap_{i=1}^n A_i$, então para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, existe $\epsilon_i > 0$ tal que $B(x;\epsilon_i) \subset A_i$. Tome $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n\}$. Então $B(x;\epsilon) \subset B(x;\epsilon_i) \subset A_i$, $i = 1, \ldots, n$. Portanto $B(x;\epsilon) \subset \cap_{i=1}^n A_i$.

Funções contínuas

Definição: Seja (X, d) e $(Y, \tilde{d})$ espaços métricos. Um mapa $T : X \longrightarrow Y$ é dito contínuo em $x_0 \in X$ se $\forall\ \epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\tilde{d}(Tx, Tx_0) < \epsilon \text{ sempre que } d(x, y) < \delta. \tag{10}$$

Ou seja, $T(B_X(x;\delta)) \subset B_Y(Tx_0; \epsilon)$. T é dito continuo se é contínuo em todo ponto de X.



Exemplo: Dada $T : X \longrightarrow Y$, suponha que exista $c > 0$ tal que $\tilde{d}(Tx_1, Tx_2) \leq cd(x_1, x_2)$ $\forall x, y \in X$. Dizemos que T é Lipschitziana. Note que T é contínua, pois dado $\epsilon > 0$, tome $\delta = \epsilon/c$. Então $d(x, x_0) < \delta \Rightarrow \tilde{d}(Tx, Tx_0) \leq cd(x, x_0) < c\delta = \epsilon$.

Exemplo: A função $f : \mathbb{R} \longleftrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^n$ (n inteiro positivo) é Lipschitziana em cada parte limitada de $\mathbb{R}$, pois se $|x| \leq a$, temos $|f'(x)| = n|x|^{n-1} \leq na^{n-1}$. Logo, para todo $|x, y| \leq a$, temos pelo TVM

$$f(x) - f(y) = f'(z)(x - y), \tag{11}$$

com z entre x e y. Logo

$$|f(x) - f(y)| = |f'(z)||x - y| \leq na^{n-1}|x - y| = c|x - y|. \tag{12}$$

Logo $f(x) = x^n$ é contínua.

Exemplo: Se $T : X \longleftrightarrow Y$ é tal que

$$\tilde{d}(Tx_1, Tx_2) \leq d(x_1, x_2)\ \ \forall x_1, x_2 \in X, \tag{13}$$

dizemos que T é contração fraca. Note que T é Lipschitziana, logo é contínua.

a) $T : X \longrightarrow Y$, $Tx = k =$ constante $\in Y\ \forall x \in X$ é contração fraca.

b) A métrica $d : X \times X \longleftrightarrow \mathbb{R}$ é uma contração fraca se tomarmos em $X \times X$ a métrica

$$d[(x_1, x_2), (y_1, y_2)] = d(x_1, x_2) + d(y_1, y_2). \tag{14}$$

Observação: Note que para todo $x, y, z \in X$, temos

$$d(x, z) \leq d(x, y + d(y, z)) \Rightarrow d(x, z) - d(y, z) \leq d(x, y). \tag{15}$$

Trocando $x \leftrightarrow y$, temos

$$d(y, z) - d(x, z) \leq d(x, y). \tag{16}$$

Temos assim,

$$|d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y). \tag{17}$$

E, portanto,

$$\begin{aligned} |d(x_1,y_1) - d(x_2,y_2)| &= |d(x_1,y_1) - d(x_1,y_2) + d(x_1,y_2) - d(x_2,y_2)| \\ &\leq |d(x_1,y_1) - d(x_1,y_2)| + |d(x_1,y_2) - d(x_2,y_2)| \\ &\leq d(y_1,y_2) + d(x_1,y_2) = d[(x_1,x_2),(y_1,y_2)]. \end{aligned} \tag{18}$$

Quando x_1 se aproxima de y_1 e x_2 se aproxima de y_2, temos que $d(x_1,x_2)$ se aproxima de $d(y_1,y_2)$.

c) Para cada $i = 1,\dots,n$, a projeção $p_i : X_1 \times \cdots \times X_n$ definida por $p_i(x_1,\dots,x_n)$ é contração fraca nas métricas d, d' e d''.

d) A inclusão $i : X \longrightarrow A \subset X$ é contração fraca.

Proposição: A composta de duas aplicações contínuas é contínua.

Demonstração: Sejam $f : X \longrightarrow Y$ contínua em $a \in X$ e $g : Y \longrightarrow Z$ contínua em $f(a)$. Então, pela continuidade de g, dado $\epsilon > 0$, existe $\lambda > 0$ tal que $y \in Y$, $d(y, f(a)) < \lambda$ implica que $d(g(y), g(f(a))) < \epsilon$. Pela continuidade de f em a, existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$, $d(x,a) < \delta$ implica $d(f(x), f(a)) < \lambda$, o que implica $d(g(f(x)), g(f(a))) < \epsilon$.

Proposição:A aplicação $f : X \longrightarrow X_1 \times X_2$ é contínua (em $a \in X$) se, e somente se, suas coordenadas $f_1 : X \longrightarrow X_1$ e $f_2 :\longrightarrow X_2$ são contínuas em a.

Demonstração: Primeiramente, suponha f contínua. Então $f_1 = p_1 \circ f$ e $f_2 = p_2 \circ f$ são contínuas.

Suponha agora que f_1 e f_2 são contínuas em $a \in X$. Seja em $X_1 \times X_2$ a métrica $d[(x_1,x_2),(y_1,y_2)] = \max\{d(x_1,y_1), d(x_2,y_2)\}$. Dado $\epsilon > 0$, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que $d(x,a) < \delta_1$ implica $d(f_1(x), f_1(a)) < \epsilon$ e $d(x,a) < \delta_2$ implica $d(f_2(x), f_2(a)) < \epsilon$. Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Então $d(x,a) < \delta$ implica que $d(f(x), f(a)) = \max\{d(f_1(x), f_1(a)), d(f_2(x), f_2(a))\} < \epsilon$. Logo f é contínua em $a \in X$.

Exemplo: Em S^1 com a métrica induzida do $\mathbb{R}^2$, a função $f : [0, 2\pi) \longrightarrow S^1$ definida por $f(t) = (\cos t, \sin t)$ é contínua pois suas coordenadas são contínuas.

Teorema: $T : X \longrightarrow Y$ é contínuo se, e somente se, a imagem inversa de qualquer aberto em Y é um aberto em X.

Demonstração: Suponha T contínuo, $S \subset Y$ aberto e $S_0 = T^{-1}(S) \subset X$. Se $S_0 = \emptyset$, então é trivialmente aberto. Caso contrário, para qualquer $x_0 \in S_0$, seja $y_0 = Tx_0$. Como S é aberto, existe $\epsilon > 0$ tal que $B_Y(y_0, \epsilon) \subset S$;. Mas T é contínuo, logo existe $\delta > 0$ tal que $T(B_X(x_0, \delta)) \subset B_Y(y_0, \epsilon) \subset S$. Isto quer dizer que $B_X(x_0, \delta) \subset T^{-1}(S) = S_0$. Logo S_0 é aberto.

Vejamos o outro lado. Para todo $x_0 \in X$, temos $T^{-1}((B_Y(Tx_0; \epsilon)))$ é aberto em X e contém x_0. Logo, existe $\delta > 0$ tal que

$$B_X(x_0; \delta) \subset T^{-1}(B_Y(Tx_0; \epsilon))) \Rightarrow T(B_X(x_0, \delta)) \subset T(T^{-1}(B_Y(Tx_0; \epsilon))) \subset B_Y(Tx_0; \epsilon). \tag{19}$$

Logo T é contínuo.

Pontos de Acumulação e fecho

Dizemos que $x_0 \in X$ é ponto de acumulação de $M \subset X$ se toda vizinhança de x_0 contém ao menos um ponto $y \in M$ distinto de x_0.

O fecho $\bar{M}$ de M é o conjunto que consiste dos pontos de M e dos pontos de acumulação de M.

Dizemos que um conjunto F é fechado se, e somente se, seu complementar F^C é aberto.

Proposição: Dado $F \subset X$, tem-se $\bar{F} = F \iff F$ é fechado.

Demonstração: $\bar{F} = F \iff$ os pontos não pertencentes a F não são pontos de acumulação de $F \iff \forall a \in F^C$ existe bola aberta $B(a;r)$ que não contém pontos de $F \iff \forall a \in F^C$, existe $r > 0$ tal que $B(a;r) \subset F^C \iff F^C$ é aberto $\iff F$ é fechado.

Note que $\bar{F}$ é o menor fechado de X que contém $\bar{F}$, pois se M é fechado e $F \subset M$, então $\bar{F} \subset \bar{M}$ $\Rightarrow \bar{F} \subset M$.

Exemplo: $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ não é aberto e nem fechado.

Exemplo: Se $X = \mathbb{R} - \{0\}$, então $(-\infty, 0)$ e $0, \infty$ são abertos e fechados (fechado não é o contrário de aberto).

Exemplo: Em $(X, \text{zero-um})$ todo subconjunto é aberto e fechado, pois $\{x_0\} \in B(x_0; 1/2)$.

Exemplo: Em $\mathbb{Q}$, o intervalo aberto $(\sqrt{2}, \pi) = \{x \in \mathbb{Q} : \sqrt{2} < x < \pi\}$ é aberto e fechado, pois $(\sqrt{2}, \pi)^C = (-\infty, \sqrt{2}) \cup (\pi, \infty)$.

Definição: Um subconjunto M de um espaço métrico X é dito denso em X se

$$\bar{M} = X. \tag{20}$$

X é dito separável se possui um subconjunto enumerável denso em X.

Note que se M é denso em X, então qualquer bola em X conterá pontos de M.

Exemplo: O conjunto do números racionais $\mathbb{Q}$ é denso nos reais: Seja $a < b$ em $\mathbb{R}$. Então existe um numero racional em (a, b).

Demonstração: Seja $\epsilon = b - 1$. Tome $N \in \mathbb{N}$ tal que $N > \frac{1}{b-a} \implies \frac{1}{N} < b - a$. Seja $A = \left\{\frac{m}{N} : m \in \mathbb{Z}\right\}$. Mostraremos que $A \cap (a, b) \neq \emptyset$. Para isto, assuma o contrário, isto é, podemos tomar m_1 o maior inteiro tal que $\frac{m_1}{N} < a$. Então $\frac{m_1+1}{N} > b$. Mas então

$$b - a < \frac{m_1 + 1}{N} - \frac{m_1}{N} < b - a. \tag{21}$$

Esta contradição nos leva a $A \cap (a, b) \neq \emptyset$, o que implica que $(a, b) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$.

Exemplo: Dessa forma, como $\mathbb{Q}$ é enumerável, temos que $\mathbb{R}$ é separável, já que $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Exemplo: $\mathbb{C}$ é separável. Tome M o conjunto de todos os números complexos com partes real e imaginária racionais.

Exemplo: X com a métrica zero-um é separável se, e somente se, é enumerável.

Demonstração: Se $M \subset X$ é tal que $\bar{M} = X$, seja $x \in X$ qualquer. Como toda bola aberta em x deve conter um elemento de M, temos $\{x\} = B(x; 1/2) \subset M$. Logo $x \in M \implies x \in M \implies X \subset M \implies X = M$.