Sequências Ortogonais Completas

Queremos coordenadas para o espaço de HIlbert H:

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, e_j \rangle e_j. \tag{1}$$

Exemplo: $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequência ortonormal em l^2. Tome $f_n = e_{n+1}$. Temos que (f_n) é sequência ortonormal em l^2. Mas para cada $x = (\xi_j) \in l^2$, temos

$$\sum_{j=1}^{\infty} \langle x, f_n \rangle f_n = \sum_{j=2}^{\infty} \langle x, e_j \rangle e_j = (0, \xi_2, \xi_3, \dots). \tag{2}$$

Note que

$$\sum_{j=1}^{\infty} | \langle x, f_n \rangle |^2 = \sum_{j=2}^{\infty} |\xi_j|^2 \leq \|x\|^2, \tag{3}$$

mas (f_n) não parece completa.

Defina o erro para uma sequência ortonormal (e_n) da forma

$$y = x - \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, e_j \rangle e_j. \tag{4}$$

Note que para cada $k \in \mathbb{N}$, temos

$$\langle y, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle - \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, e_j \rangle \langle e_j, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle - \langle y, e_k \rangle = 0. \tag{5}$$

Se o único vetor ortogonal a todo e_n for o vetor nulo, temos que $y = 0$ (erro zero).

Definição: Uma sequência ortonormal (e_n) em um espaço de Hilbert H é completa (base ortonormal) se o único membro de H ortogonal a todo e_n é o vetor nulo.

Teorema: Seja (e_n) sequência ortonormal completa em um espaço de Hilbert H. Então para todo $x \in H$, temos

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, e_j \rangle e_j \tag{6}$$

e

$$\|x\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} | \langle x, e_j \rangle |^2. \tag{7}$$

Demonstração:

$$\left\| \sum_{j=1}^{N} \langle x, e_j \rangle \right\|^2 = \sum_{j=1}^{N} | \langle x, e_j \rangle |^2. \tag{8}$$

No limite temos o resultado.

Exemplo (Polinômios de Legendre): Seja $X = C[0,1]$ com o produto interno

$$\langle x, y \rangle = \int_{-1}^{1} x(t)y(t)dt. \tag{9}$$

O completamento de X é $L^2[0,1]$. Vamos primeiramete ortonormalizar os polinômios $x_0(t) = 1$, $x_1(t) = t$, $x_2(t) = t^2$, etc., pelo processo de Gram-Schmidt.

Para isso, defina

$$e_0(t) = \frac{x_0(t)}{\|x_0\|} = \frac{1}{\sqrt{\int_{-1}^{1} 1dt}} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{10}$$

Seja agora

$$v_1(t) = x_1 - \langle x_1, e_0 \rangle e_0(t) = t - \left(\int_{-1}^{1} tdt \right) \frac{1}{\sqrt{2}} = t, \tag{11}$$

isto é, retiramos de x_1 sua projeção no espaço span$\{e_0\}$. Defina pois

$$e_1(t) = \frac{v_1(t)}{\|v_1\|} = \frac{t}{\sqrt{\int_{-1}^{1} t^2 dt}} = \sqrt{\frac{3}{2}}t. \tag{12}$$

Retire de x_2 sua projeção em span$\{e_0, e_1\}$, isto é

$$\begin{aligned} v_2(t) &= x_2(t) - \langle x_2, e_0 \rangle e_0(t) - \langle x, e_1 \rangle e_1(t) = t^2 - \frac{1}{3} \\ e_2(t) &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}(3t^2 - 1). \end{aligned} \tag{13}$$

Note que a cada passo span$\{e_0, e_1, \ldots, e_n\}$ = span$\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ e $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$. Obtemos assim um conjunto ortonormal em L^2. Para mostrarmos que ele é completo, note que $W = A(X)$ é denso em $L^2[-1,1]$. Logo, dado $x \in L^2$ e $\epsilon > 0$, existe y contínuo tal que

$$\|x - y\| < \epsilon/2. \tag{14}$$

Para este y, existe polinômio z (Weierstrass) tal que

$$|y(t) - z(t)| < \frac{\epsilon}{2\sqrt{2}}. \tag{15}$$

Logo

$$\|y - z\|^2 = \int_{-1}^{1} |y(t) - z(t)|^2 dt < 2\frac{\epsilon^2}{(2\sqrt{2})^2} = \frac{\epsilon}{4}. \tag{16}$$

Portanto

$$\|x - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \tag{17}$$

Note que se definirmos um sequência ortonormal completa em um espaço com produto interno X como (e_n) com

$$\overline{\text{span}\{e_n\}} = X, \tag{18}$$

temos o seguinte teorema.

Teorema: Seja (e_n) sequência ortonormal em um espaço com produto interno X. Então

a) Se (e_n) é total em X, então

$$x \perp M \Rightarrow x = 0. \tag{19}$$

b) Se X é completo, então se

$$x \perp (e_n) \Rightarrow x = 0, \tag{20}$$

temos que M é completa.

Outro critério para totalidade de uma seuência ortonormal é dado a seguir (identidade de Parseval).

Teorema: $(e_n) \subset H$ é completa se, e somente se,

$$\|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 \;\; \forall x \in H. \tag{21}$$

Demonstração: Só falta mostrar a volta. Seponha para isso (e_n) não completo. Então existe $x \neq 0$ em H tal que $x \perp e_n$. Então $\|x_n\| \neq 0$, mas

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle| = 0. \tag{22}$$

Teorema: Seja H espaço de Hilbert. Se H contém uma sequência ortonormal completa, então H é separável.

Demonstração: Seja (e_n) sequência ortonormal completa em H e seja M o conjunto de todas as combinações lineares da forma

$$\gamma_1^{(n)} e_1 + \cdots + \gamma_n^{(n)} e_n, \;\; n = 1m2m\ldots, \tag{23}$$

onde $\gamma_k^{(n)} = a_k^{(n)} + ib_k^{(n)}$ com $a_k^{(n)}$ e $b_k^{(n)}$ racionais. Temos que M é enumerável. Como (e_n) é completa em H, dado $x \in H$, existe $y \in Y_n = \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_n\}$ para algum n tal que

$$\|x - y\| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{24}$$

Em particular,

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k \right\| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{25}$$

Para cada $\langle x, e_k\rangle$, existe $\gamma_k^{(n)}$ tal que

$$|\langle x, e_k\rangle - \gamma_k^{(n)}| < \frac{\epsilon}{2n}. \tag{26}$$

Logo

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k - \sum_{k=1}^{n} \gamma_k^{(n)} e_k \right\| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{27}$$

Defina

$$v = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k^{(n)} e_k \in M. \tag{28}$$

Então

$$\|x - v\| \leq \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k \right\| + \left\| \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k - \sum_{k=1}^{n} \gamma_k^{(n)} e_k \right\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \tag{29}$$

Logo M é denso em H, portanto H é separável.

Definição: Um mapa $U : H_1 \longrightarrow H_2$ é isomorfismo se [e linear, bijetivo e

$$\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle \;\; \forall\, x, y \in H_1. \tag{30}$$

H_1 e H_2 são ditos isomorfos.

Teorema: Seja H espaço de Hilbert separável. Então H é ismorfo a $\mathbb{C}^n$ para algum n ou a l^2.

Demonstração: Suponha $\{e_1, \dots, e_n\}$ base ortonormal de H. Defina $U : H \longrightarrow \mathbb{C}^n$ por $\xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n \mapsto (\xi_1, \dots, \xi_n)$. Obviamente U é linear e bijetivo, além disso

$$\langle Ux, Uy \rangle = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \overline{\eta}_j = \langle \xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n, \eta_1 e_1 + \dots + \eta_n e_n \rangle = \langle x, y \rangle . \tag{31}$$

Se H possui uma sequência ortonormal completa (e_n), defina $U : H \longrightarrow l^2$ por $Ux = (\xi_n)$, onde $\xi_n = \langle x, e_n \rangle$. Sabemos que $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 < \infty$, logo $Ux \in l^2$. Além disso, se $(\xi_n) \in l^2$, então $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n$ converge para algum ponto de H. Logo U é sobre e claramente linear. Além disso

$$\langle Ux, Uy \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \overline{\eta}_n = \left\langle sum_{j=1}^{\infty} \xi_j e_j, \sum_{j=1}^{\infty} \eta_j e_j \right\rangle = \langle x, y \rangle . \tag{32}$$

Logo U é isomorfismo e H é isomorfo a l^2.

Exemplo (Série de Fourier): $H = L^2[-\pi, pi]$. Uma série de Fourier é uma expressão da forma

$$a_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kt + b_k \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kt. \quad (*) \tag{33}$$

Se definirmos $u_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $u_k(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kt$ e $v_k(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kt$, temos uma base ortonormal.

Dado $x \in L^2[-\pi, \pi]$, a série de Fourier de $x(t)$ é dada por (ast) com

$$\begin{aligned} a_0 &= \langle x, u_0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) dt \\ a_k &= \langle x, u_k \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \cos ktdt \\ b_k &= \langle x, v_k \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \sin ktdt. \end{aligned} \tag{34}$$

Tome $x(t)$ da forma

$$x(t) = \begin{cases} 1, & -\pi \leq t < 0 \\ 0, & 0 \leq t \leq \pi. \end{cases} \tag{35}$$

Temos assim

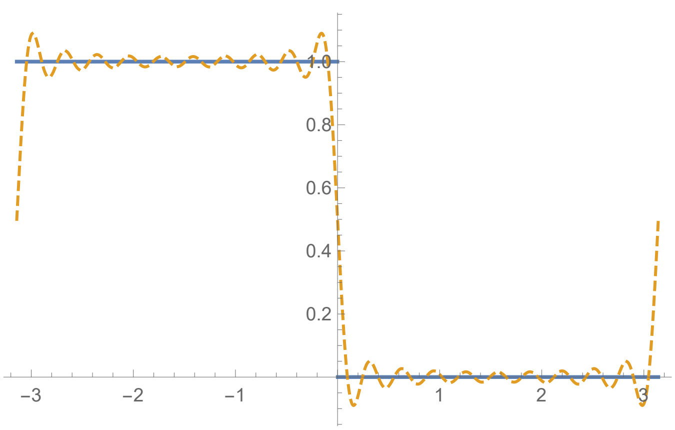
$$\begin{aligned} a_0 &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \\ a_k &= 0 \\ b_k &= \frac{(-1)^k - 1}{k\sqrt{\pi}}. \end{aligned} \tag{36}$$

A série de Fourier de $x(t)$ é

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k - 1}{k} \sin kt. \tag{37}$$

Note que $f(0) = f(\pi) = 1/2$.

Note que para $k = 20$, temos $\|x - f\|^2 = 0.032$. Para k=30, temos $\|x - f\|^2 = 0.0.021$, para $k = 100$ temos $\|x - f\|^2 = 0.006$.


1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
−3
−2
−1
1
2
3