Expansões Ortogonais

Em $\mathbb{R}^3$, temos

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}, \;\; \{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\} \text{ ortonormal.} \tag{1}$$

Logo

$$\begin{aligned} x = \vec{r}\cdot\hat{i},\; y = \vec{r}\cdot\hat{j},\; z = \vec{r}\cdot\hat{k} \\ |\vec{r}|^2 = (\vec{r}\cdot\hat{i})^2 + (\vec{r}\cdot\hat{j})^2 + (\vec{r}\cdot\hat{k})^2. \end{aligned} \tag{2}$$

Definição: Uma família $(e_\alpha)_{\alpha\in A}$ em $X - \{0\}$ é chamada um sistema ortogonal se $e_\alpha \perp e_\beta$ quando $\alpha \neq \beta$. Se $\|e_\alpha\| = 1$ $\forall \alpha \in A$ dizemos que é um sistema ortonormal. Se $A = \mathbb{N}$, dizemos que (e_n) é uma sequência ortogonal (ortonormal).

Exemplo: Em l^2, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência ortonormal, onde $e_n = (\delta_{nj})$.

Exemplo: Em $L^2(-\pi,\pi)$, $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ dada por

$$e_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int} \tag{3}$$

é família ortonormal, já que

$$\langle e_n, e_m\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{i(n-m)t} = \delta_{nm}. \tag{4}$$

Definição: Se (e_n) é uma sequência ortonrmal qm um espaço de Hilbert H, então para cada $x \in H$, $\langle x, e_n\rangle$ é chamado de n-ésimo coeficiente de Fourier de x com respeito a (e_n). A série de Fourier de x com respeito a (e_n) é a série

$$\sum_n \langle x, e_n\rangle\, e_n. \tag{5}$$

Teorema: Se $x_1, \ldots, x_n$ é sistema ortogonal em um espaço com produto interno, então

$$\left\| \sum_{j=1}^n x_j \right\|^2 = \sum_{j=1}^n \|x_j\|^2. \tag{6}$$

Demonstração:

$$\left\| \sum_{j=1}^n x_j \right\|^2 = \left\langle \sum_{j=1}^n x_j, \sum_{l=1}^n x_l \right\rangle = \sum_{j=1}^n\sum_{l=1}^n \langle x_j, x_j\rangle = \sum_{j=1}^n\sum_{l=1}^n \|x_j\|^2\delta_{jl} = \sum_{j=1}^n \|x_j\|^2. \tag{7}$$

Lema: Seja $e_1, \ldots, e_n$ sistema ortonormal em um espaço com produto interno X. Seja $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ escalares e seja $x \in X$. Então

$$\left\| x - \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j \right\|^2 = \|x\|^2 + \sum_{j=1}^n |\lambda_j - c_j|^2 - \sum_{j=1}^n c_j, \tag{8}$$

onde $c_j = \langle x, e_j\rangle$.

Demonstração:

$$\left\langle x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i, x - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j \right\rangle = \|x\|^2 - \sum_{j=1}^{n} \overline{\lambda}_j \langle x, e_j \rangle - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \overline{\langle x, e_j \rangle} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \langle e_i, e_j \rangle$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{j=1}^{n} \overline{\lambda}_j c_j - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \overline{c}_j + \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|^2$$

$$= \|x\|^2 + \sum_{j=1}^{n} \left(\lambda_j \overline{\lambda}_j - \lambda_j \overline{c}_j - \overline{\lambda}_j c_j + c_j \overline{c}_j\right) - \sum_{j=1}^{n} |c_j|^2 \tag{9}$$

$$= \|x\|^2 + \sum_{j=1}^{n} (\lambda_j - c_j)(\overline{\lambda}_j - \overline{c}_j) - \sum_{j=1}^{n} |c_j|^2$$

$$= \|x\|^2 + \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j - c_j|^2 - \sum_{j=1}^{n} |c_j|^2.$$

Note que na expressão acima, (λ_j) é o unico termo não fixo. Se quisermos minimizar o erro, devemos então escolher $\lambda_j = c_j = \langle x, e_j \rangle$. Isto demonstra o seguinte teorema.

Teorema: Seja $e_1, e_2, \ldots, e_n$ sistema ortonormal em um espaço com produto interno X e seja $x \in X$. O ponto y de span$\{e_1, \ldots, e_n\}$ mais próximo de X é

$$y = \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle e_j \tag{10}$$

e $d = \|x - y\|$ é dada por

$$d^2 = \|x\|^2 - \sum_{j=1}^{n} | \langle x, e_j \rangle |^2. \tag{11}$$

Note que

$$\left\langle x - y, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j \right\rangle = \left\langle x - \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle e_j, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} \overline{\lambda}_j \langle x, e_j \rangle - \sum_{j=1}^{n} \overline{\lambda}_j \langle x, e_j \rangle = 0. \tag{12}$$

Exemplo: Seja $H = L^2(0,1)$, $e_0(t) = 1$, $e_1(t) = \sqrt{2}(2t-1)$.

Note que

$$\langle e_0, e_1 \rangle = \int_0^1 \sqrt{3}(2t-1)dt = \sqrt{3}\left[t^2|_0^1 - t|_0^1\right] = 0 \tag{13}$$

Analogamente, podemos ver que $\langle e_0, e_0 \rangle = \langle e_1, e_1 \rangle = 1$.

Se $x(t) = t^2$, então o polinômio de grau 1 mais próximo de x é

$$y(t) = \langle x, e_0 \rangle e_0(t) + \langle x, e_1 \rangle e_(t) = \left(\int_0^1 t^2\right) 1 + \left[\int_0^1 t^2 \sqrt{3}(2t-1)\right] \sqrt{3}(2t-1) = t - \frac{1}{6} \tag{14}$$

Desigualdade de Bessel

Teorema: Se $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência ortonormal em um espaço com produto interno X, então para cada $x \in X$, temos

$$\sum_{j=1}^{\infty} | \langle x, e_j \rangle |^2 \leq \|x\|^2. \tag{15}$$

Demonstração: Para cada $N \in \mathbb{N}$ e $y_N = \sum_{j=1}^{N} \langle x, e_n \rangle e_n$, temos

$$\|x - y_N\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{n=1}^{N} |\langle x, e_n \rangle|^2, \tag{16}$$

logo

$$\sum_{n=1}^{N} |\langle x, e_n \rangle|^2 = \|x\|^2 - \|x - y_N\|^2 \leq \|x\|^2. \tag{17}$$

No limite quando $N \to \infty$, temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_j \rangle|^2 \leq \|x\|^2. \tag{18}$$

Teorema: Seja $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sequência ortonormal em um espaço de HIlbert H e $\lambda_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. Então $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n$ converge se, e somente se,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 < \infty. \tag{19}$$

Demonstração: Suponha que $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n$ converge para $x \in H$. Então para $m \geq k$, temos

$$\left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n, e_k \right\rangle = \lambda_k. \tag{20}$$

No limite temos $\langle x, e_k \rangle = \lambda_k$. Pela desigualdade de Bessel

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2 < \infty. \tag{21}$$

Suponha agora que $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 < \infty$. Defina $x_m = \sum_{n=1}^{m} \lambda_n e_n$. Assim, para $m > k$

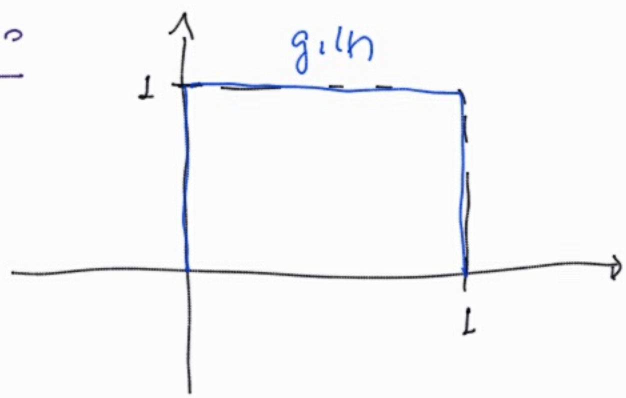
$$\|x_m - x_k\|^2 = \left\| \sum_{n=k+1}^{m} \lambda_j e_j \right\|^2 = \sum_{n=k+1}^{m} |\lambda_n|^2. \tag{22}$$

Logo (x_m) é de Cauchy e como estamos em um espaço de Hilbert, converge.

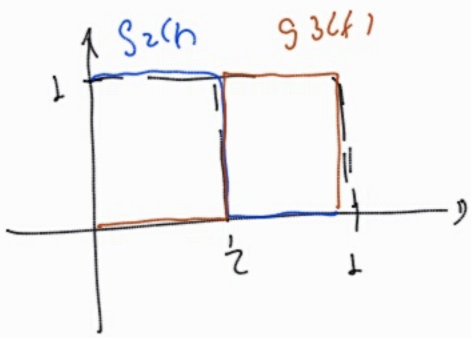
Convergência Pontual e L^2

$2^m \to 2^{m+1} - 1$ funções características em cada subintervalo. Então $\|g_n\| \sim 2^{-m/2}$, $2^m \leq n \leq 2^{m+1} - 1$. Logo, quando $n \to \infty$ temos $\|g_n\| \to 0$. Porém $g_n(t) = 1$ muitas vezes se $t \in (0, 1)$ não é da forma $r/(2m)$, com $r, m \in \mathbb{N}$. Logo (g_n) converge para zero em L^2, mas não converge para 0 pontualmente.

$m=0$



$m=1$



$m=2$