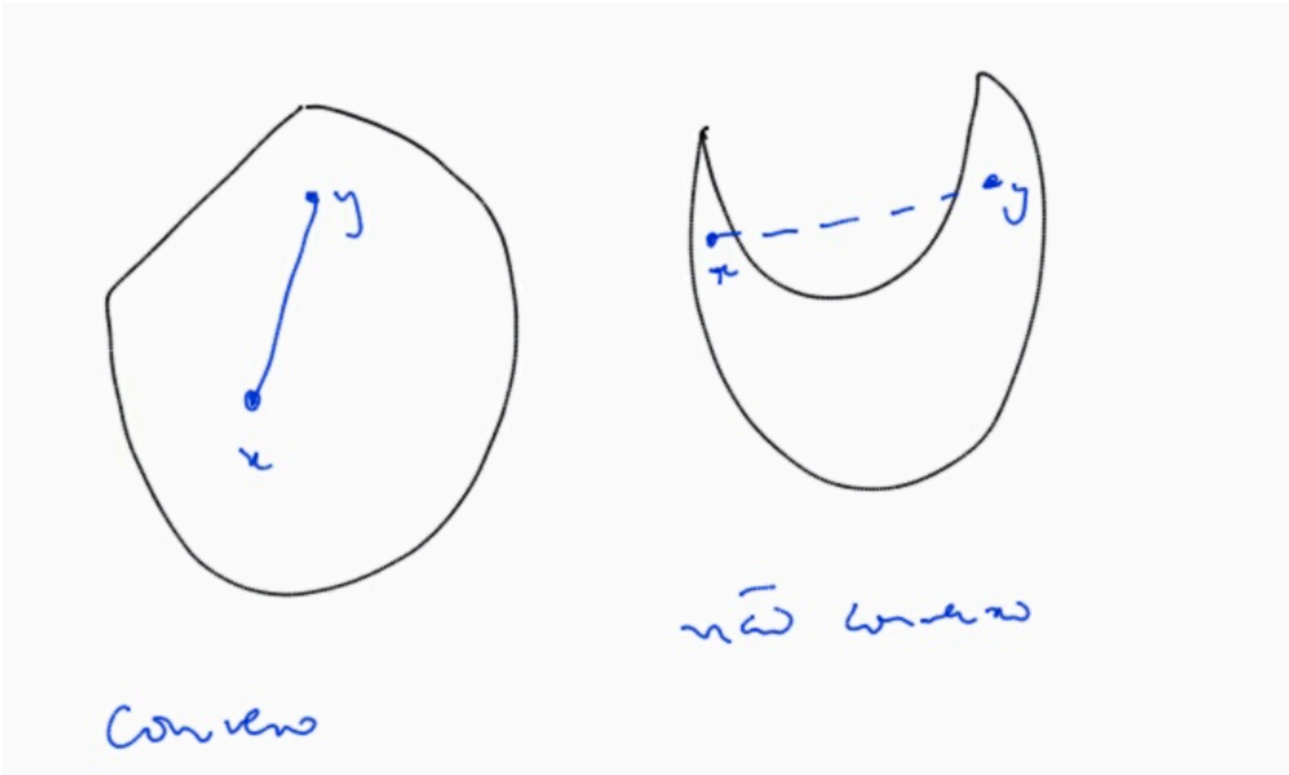
A propriedade do Ponto Mais Proximo

Defiição: Um subconjunto M de um espaço vetorial real ou complexo é convexo se $\forall x, y \in M$ e $\forall\lambda$ tal que $0 < \lambda < 1$, o ponto $\lambda x + (1-\lambda)y$ pertence a M.



Teorema: Seja M conjunto não vazio, fechado e convexo em um espaço de Hilbert H. Então para todo $x \in H$, existe um único ponto de M que é mais próximo de x que qualquer outro ponto de M. Isto é, existe único $y \in M$ tal que

$$\|x - y\| = \inf_{x-\tilde{y}} \|x - \tilde{y}\| \tag{1}$$

Demonstração: Seja $\kappa = \inf_{\tilde{y}\in M} \|x - \tilde{y}\|$. Como $M \neq \emptyset$, $\kappa < \infty$ e para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $y_n \in M$ tal que

$$\|x - y_n\|^2 < \kappa^2 + \frac{1}{n}. \tag{2}$$

Note que

$$\begin{aligned} \|y_m - y_n\|^2 &= \|x - y_n - (x - y_m)\|^2 \\ &= \|x - y_n - (x - y_m)\|^2 + \|x - y_n + (x - y_m)\|^2 - \|x - y_n + (x - y_m)\|^2 \\ &= 2\|x - y_n\|^2 + 2\|x - y_m\|^2 - \|2x - (y_n + y_m)\|^2 \\ &< 4\kappa^2 + 2\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right) - 4\left\|x - \frac{y_n + y_m}{2}\right\|^2, \end{aligned} \tag{3}$$

onde utilizamos a lei do paralelogramo. Como M é convexo, temos que $\frac{y_n+y_m}{2} \in M$, logo

$$\left\|x - \frac{y_n + y_m}{2}\right\|^2 \geq \kappa^2. \tag{4}$$

Portanto

$$\|y_n - y_m\|^2 \leq 4\kappa^2 + 2\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right) - 4\kappa^2 = 2\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right). \tag{5}$$

Logo (y_n) é de Cauchy e, portanto, converge para $y \in H$. Como M [e fechado, temos que $y \in M$ e assim

$$\|x - y\| \geq \kappa. \tag{6}$$

Mas

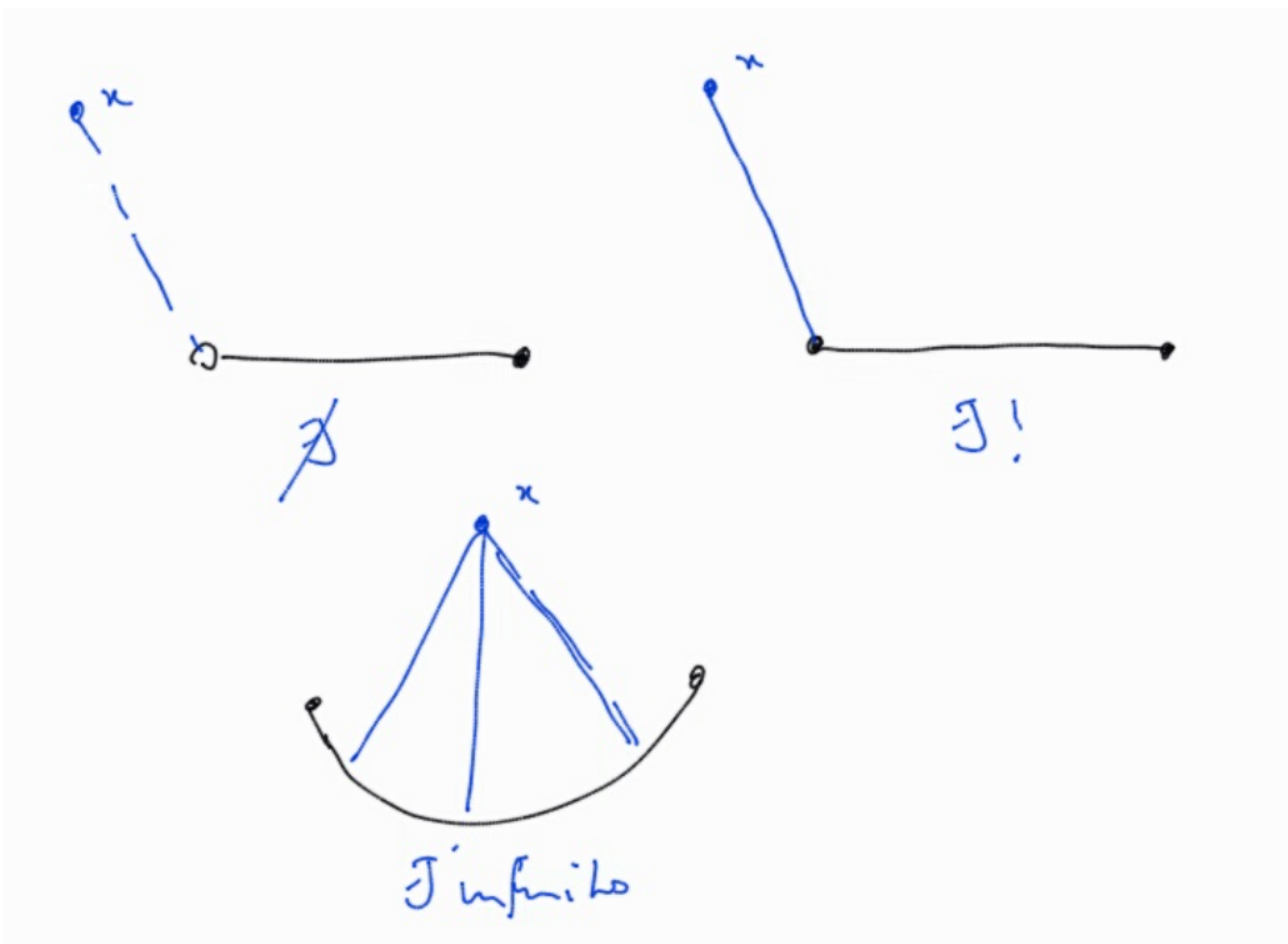
$$\|x - y_n\|^2 < \kappa^2 + \frac{1}{n} \to \kappa^2 \tag{7}$$

quando $n \to \infty$. Logo $\|x - y\|^2 \leq \kappa^2$ e, portanto, $\|x - y\| = \kappa$.

Para provarmos a unicidade de y, suponha que $\|x - z\| = \kappa$, $z \in M$. Então $\frac{y+z}{2} \in M \Rightarrow \left\|x - \frac{y+z}{2}\right\| \geq \kappa$. Mas

$$\|y - z\|^2 = 2\|x - z\|^2 + 2\|x - y\|^2 - 4\left\|x - \frac{y+z}{2}\right\|^2 \leq 2\kappa^2 + 2\kappa^2 - 4\kappa^2 = 0. \tag{8}$$

Logo $y = z$.



Exemplo: Seja $X = \mathbb{R}^2$ com a norma

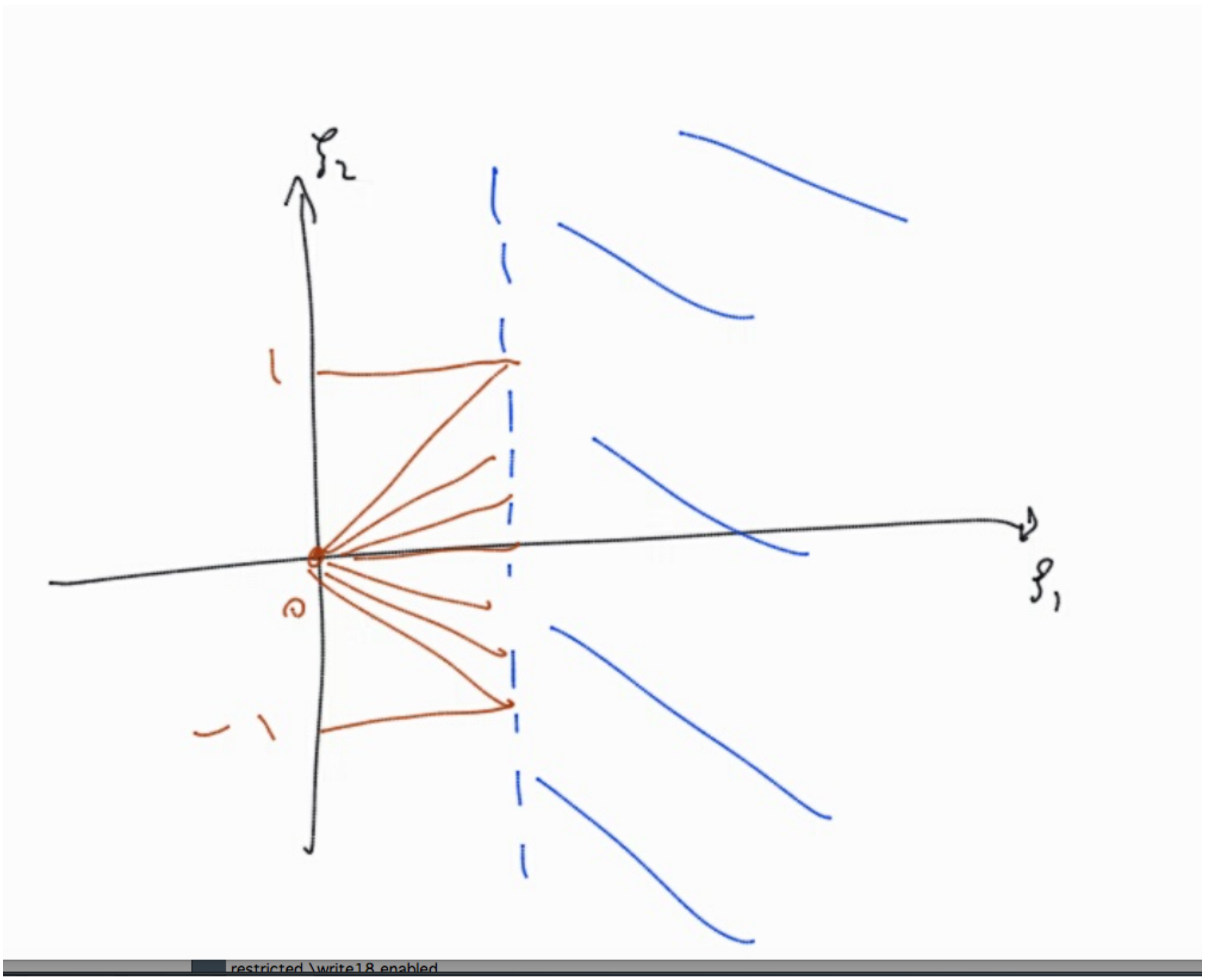
$$\|(\xi_1, \xi_2)\| = \max\{|\xi_1|, |\xi_2|\} \tag{9}$$

Seja $M = \{(\xi_1, \xi_2) : \xi_1 \geq 1\}$ convexo. Note que

$$d((0,0),(\xi_1,\xi_2)) \geq 1, \tag{10}$$

mas

$$d((0,0),(1,0)) = 1,\ d((0,0),(1,\pm 1/2)) = 1, \ldots \tag{11}$$



Definição: Um elemento x em um espaço com produto interno X é dito ortogonal a $y \in X$ se

$$\langle x, y\rangle = 0 \quad (x \perp y) \tag{12}$$

Dados subconjuntos $A, B \subset X$, dizemos que x é ortogonal a A ($x \perp A$) se $x \perp a$ $\forall a \in A$ e dizemos que $A \perp B$ se $a \perp b$ $\forall a \in A$ e $\forall b \in B$.

Lema: No teorema anterior, seja M subespaço fechado Y e $x \in Y$ fixo. Então $z = x - y$ é ortogonal a Y.

Demonstração: Suponha que z não seja ortogonal a Y. Então existe $y_1 \in Y - \{0\}$ tal que

$$\langle z, y_1 \rangle = \beta \neq 0. \tag{13}$$

Então, para qualquer escalar α, temos

$$\begin{aligned} \|z - \alpha y_1\|^2 = \langle z - \alpha y_1, z - \alpha y_1 \rangle &= \|z\|^2 - \overline{\alpha} \langle z, y_1 \rangle - \alpha \left[\langle y_1, z \rangle - \overline{\alpha} \langle y_1, y_1 \rangle \right] \\ &= \langle z, z \rangle - \overline{\alpha}\beta - \alpha \left[\overline{\beta} - \overline{\alpha} \langle y_1, y_1 \rangle \right] \end{aligned} \tag{14}$$

Escolha $\alpha = \frac{\overline{\beta}}{\langle y_1, y_1 \rangle}$ e temos

$$\|z - \alpha y_1\|^2 = \|z\|^2 - \frac{|\beta|^2}{\langle y_1, y_1 \rangle} < \delta^2. \tag{15}$$

Mas isto é impossível, pois $\alpha y_1 \in Y$. Logo $z - y \perp Y$.

Definição (Soma Direta): Um espaço vetorial X é dito ser soma direta de dois subespaços Y e Z de X:

$$X = Y \oplus Z \tag{16}$$

se cada $x \in X$ tem uma representação única

$$x = y + z, \quad y \in Y, z \in Z. \tag{17}$$

Dado um subconjunto M de um espaço com produto interno X, o complemento ortogonal $M^\perp$ de M é definido como o conjunto de todos os vetores ortogonais a M. Isto é

$$M^\perp = \{x \in X : x \perp M\} \tag{18}$$

Note que $M^\perp$ é um espaço vetorial, já que dados $x, y \in M$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, temos

$$\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle = 0 + 0 \ \ \forall \in M. \tag{19}$$

Logo $\alpha x + \beta y \in M^\perp$. Além disso, seja $x \in \overline{M^\perp}$. Então existe sequência (x_n) em $M^\perp$ tal que $x_n \to x$. Então

$$\langle x, z \rangle = \lim_{n \to \infty} \langle x_n, z \rangle = \lim_{n \to \infty} 0 = 0 \ \ \forall z \in M. \tag{20}$$

Logo $x \in M^\perp$ e, portanto, $M^\perp$ é fechado.

Além disso, se denotarmos $(M^\perp)^\perp = M^{\perp\perp}$, temos $M \subset M^{\perp\perp}$ pois se $x \in M$, então $\langle x, y \rangle = 0$ $\forall y \in M^\perp \Rightarrow x \in M^{\perp\perp}$.

Para a decomposição de um espaço de Hilbert em soma direta, temos o seguinte teorema.

Teorema: Seja Y subespaço fechado de um espaço de HIlbert H. Então

$$H = Y \oplus Y^\perp. \tag{21}$$

Demonstração: Como Y é fechado dentro de um espaço de Hiilbert, é completo. Além disso, por ser subespaço vetorial é convexo, logo para cada $x \in X$, existe $y \in Y$ tal que $z = x - y \perp Y \Rightarrow x = y + z$. Assuma agora que

$$x = y + z = y_1 + z_1. \tag{22}$$

Então $y - y_1 = z - z_1$. Como $z - z_1 \in Y^\perp$ e $y - y_1 \in Y$, temos que $y - y_1 \in Y \cap Y^\perp = \{0\}$. Logo $y = y_1 \Rightarrow z = z_1$ e a representação é única.

Através do teorema anterioe, podemos definir o operador projeção ortogonal da forma $P : H \longrightarrow Y$ da forma $y = Px$. Note que este operador leva H em Y, Y em Y e $Y^\perp$ em $\{0\}$. Além disso ele é idempotente, ou seja $P^2 = P$.

Teorema: Seja Y subespaço fechado de um espaço de Hilbert H. Então

$$Y = Y^{\perp\perp}. \tag{23}$$

Demonstração: Já vimos que $Y \subset Y^{\perp\perp}$. Vejamos agora que $Y^{\perp\perp} \subset Y$. Para isso, seja $x \in Y^{\perp\perp}$. Então $x = y + z$, onde $x \in Y \subset Y^{\perp\perp}$ e $z \in Y^{\perp}$. Como x e y pertencem a $Y^{\perp\perp}$, que é um espaço vetorial, etnão $z = x - y \in Y^{\perp\perp}$ e, portanto $z \perp Y^{\perp}$. Mas isto implica que $z \perp z$, logo $z = 0$ e, portanto $x = y \in Y$. Logo $Y^{\perp\perp} \subset Y$.

Teorema: Para qualquer conjunto $M \neq \emptyset$ de um espaço de Hilbert H, o span$M$ é denso em H se, e somente se $M^{\perp = \{0\}}$.

Demonstração: Suponha que $V = \text{span} M$ é denso em H e seja $x \in M^{\perp}$. Então $x \in \overline{V} = H$, o que implica que existe uma sequência (x_n) em V tal que $x_n \to x$. Como $x \in M^{\perp}$ e $M^{\perp} \perp V$, temos que $\langle x_n, x \rangle = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \langle x_n, x \rangle = 0 \Rightarrow \langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$, logo $M^{\perp} = \{0\}$. Suponha agora que $M^{\perp} = \{0\}$. Se $x \perp V$, temos que $x \perp M$, logo $x = 0 \Rightarrow V^{\perp} = \{0\}$. Como V é subespaço de H, temos que $\overline{V}$ é subespaço fechado de H. Note que se $A \subset B \Rightarrow B^{\perp} \subset A^{\perp}$, logo $\overline{V}^{\perp} \subset V^{\perp} = \{0\}$ e, portanto, $H = \overline{V}$.