Espaços com Produto Interno

Defiição: Um produto interno em um espaço vetorial complexo X é um mapa

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \longrightarrow \mathbb{C} \tag{1}$$

tal que $\forall x, y, z \imath X$ e $\forall \lambda \in \mathbb{C}$

i) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

ii) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$

iii) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

iv) $\langle x, x \rangle > 0$ quando $x \neq 0$.

Um espaço com produto interno é um par $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Exemplo:

$$\langle x, y \rangle = \int_0^1 x(t)\overline{y(t)}dt \tag{2}$$

define um produto interno em $C[0, 1]$ (complexo). Note que

i) $\langle x, y \rangle = \int_0^1 x(t)\overline{y(t)}dt = \overline{\int_0^1 \overline{x(t)}y(t)dt} = \overline{\langle y, x \rangle}$.

ii) $\langle \lambda x, y \rangle = \int_0^1 (\lambda x(t))\overline{y(t)}dt = \lambda \int_0^1 x(t)\overline{y(t)}dt = \lambda \langle x, y \rangle$.

iii) $\langle x + y, z \rangle = \int_0^1 (x(t) + y(t))\overline{z(t)}dt = \int_0^1 x(t)\overline{z(t)}dt + \int_0^1 y(t)\overline{z(t)}dt = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$.

iv) $\langle x, x \rangle = \int_0^1 |x(t)|^2 dt > 0$ se $x(t) \neq 0$.

Teorema: $\forall x, y, z$ em um espaço com produto interno X e $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, temos

i) $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$.

ii) $\langle x, \lambda y \rangle = \overline{\lambda} \langle x, y \rangle$.

iii) $\langle x, 0 \rangle = 0 = \langle 0, x \rangle$.

iv) Se $\langle x, z \rangle = \langle y, z \rangle$ para todo $z \in X$, então $x = y$.

Demonstração:

i) $\langle x, y + z \rangle = \overline{\langle y + z, x \rangle} = \overline{\langle y, x \rangle + \langle z, x \rangle} = \overline{\langle y, x \rangle} + \overline{\langle z, x \rangle} = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$.

ii) $\langle x, \lambda y \rangle = \overline{\langle \lambda y, x \rangle} = \overline{\lambda \langle y, x \rangle} = \overline{\lambda}\overline{\langle y, x \rangle} = \overline{\lambda} \langle x, y \rangle$.

iii) $\langle x, 0 \rangle = \langle x, 0y \rangle$ para $y \in X$ qualquer. Logo $\langle x, 0 \rangle = 0 \langle x, y \rangle = 0$.

iv) $\langle x, z \rangle = \langle y, z \rangle \Rightarrow \langle x, z \rangle - \langle y, z \rangle = 0 \Rightarrow \langle x - y, z \rangle = 0 \ \forall z \in X$. Tome $z = x - y$ e temos $\langle x - y, x - y \rangle = 0 \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y$.

Exemplo: $\mathbb{C}^n$

$$\langle x, y\rangle = \xi_1\overline{\eta_1} + \cdots + \xi_n\overline{\eta_n}. \tag{3}$$

Exemplo: l^2

$$\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j\overline{\eta_j}. \tag{4}$$

Note que a soma converge pela desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Espaços com Produto Interno como Espaços Métricos

Em $\mathbb{R}^3$, temos

$$\langle x, y\rangle = \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \xi_3\eta_3 \tag{5}$$

e

$$\begin{aligned} &\|x\|\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2} = \sqrt{\langle x, x\rangle} \\ &d(x, y) = \sqrt{(\xi_1 - \eta_1)^2 + (\xi_2 - \eta_2)^2 + (\xi_3 - \eta_3)^2} = \|x - y\|. \end{aligned} \tag{6}$$

Definição: A norma de um vetor x em um espaço com produto interno X é definido como $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$.

Exemplo: Em $C[0, 1]$

$$\|x\| = \left\{\int_0^1 |x(t)|^2 dt\right\}^{1/2}. \tag{7}$$

Teorema: $\forall x$ em um espaço com produto interno X e $\forall \lambda \mathbb{C}$

i) $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

ii) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$.

Demonstração:

ii) $\|\lambda x\| = \langle \lambda x, \lambda x\rangle^{1/2} = \left(\lambda\overline{\lambda}\,\langle x, x\rangle\right)^{1/2} = |\lambda|\|x\|$.

Teorema: $\forall x, y$ em um espaço com produto interno X

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\| \quad \text{(desigualdade de Cauchy-Schwarz).} \tag{8}$$

Demonstração: Suponha primeiramente x, y L.D. ($x = \lambda y, \lambda \in \mathbb{C}$). Então

$$|\,\langle x, y\rangle\,| = |\,\langle \lambda y, y\rangle\,| = |\lambda|\,\langle y, y\rangle = |\lambda|\|y\|^2 = \|x\|\|y\| \tag{9}$$

e a igualdade vale.

Suponha agora x, y L.I.. Então para qualquer $\lambda \in \mathbb{C}$, $x + \lambda y \neq 0$. Entã

$$\begin{aligned} 0 &< \langle x + \lambda y, x + \lambda y\rangle = \langle x, x + \lambda y\rangle + \langle \lambda y, x + \lambda y\rangle \\ &= \langle x, x\rangle + \langle x, \lambda y\rangle + \langle \lambda y, y\rangle + \langle \lambda y, \lambda y\rangle \\ &= \|x\|^2 + \overline{\lambda}\,\langle x, y\rangle + \lambda\overline{\langle x, y\rangle} + |\lambda|^2\|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}\{\overline{\lambda}\,\langle x, y\rangle\} + |\lambda|^2\|y\|^2. \end{aligned} \tag{10}$$

Escolha um número complexo u tal que $|u| = 1$ e $\overline{u}\left\langle x, y\right\rangle = |\left\langle x, y\right\rangle|$. Defina $\lambda = tu$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Então

$$0 < \|x\|^2 + 2|\left\langle x, y\right\rangle|t + \|y\|^2 t^2. \tag{11}$$

Temos uma parábola que não atinge o eixo x, logo

$$\Delta = 4|\left\langle x, y\right\rangle|^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 < 0 \Rightarrow |\left\langle x, y\right\rangle| < \|x\|\|y\|. \tag{12}$$

Exemplo: Prove que $\forall x \in C[0, 1]$

$$\left|\int_0^1 x(t) \sin \pi t dt\right| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{\int_0^1 |x(t)|^2 dt\right\}^{1/2}. \tag{13}$$

Note que temos $\langle x, \sin \pi t\rangle \leq \|x\|\|\sin \pi t\|$. Mas

$$\|\sin \pi t\| = \left(\int_0^1 \sin^2 \pi t dt\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{14}$$

Teorema: $\forall x, y$ en um espaço com produto interno X,

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|. \tag{15}$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y\rangle = \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}\left\langle x, y\right\rangle + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2|\left\langle x, y\right\rangle| + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned} \tag{16}$$

Vemos assim que $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$ define realmente uma norma. Um espaço de Hilbert é um espaço com produto interno completo na norma induzida pelo produto interno.

Vejamos agora a lei do paralelogramo.

Teorema: $\forall x, y$ em um espao com produto interno X, temos

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2. \tag{17}$$

Demonstração:

$$\langle x + y, x + y\rangle + \langle x - y, x - y\rangle = \|x\|^2 + \langle x, y\rangle + \langle x, y\rangle + \|y\|^2 + \|x\|^2 - \langle x, y\rangle - \langle y, x\rangle + \|y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \tag{18}$$

Exemplo: l^p, $p \neq 2$ não é espaço com produto interno.

Tome $x = (1, 1, 0, 0, \dots), y = (1, -1, 0, 0, \dots) \in l^p$. Então $\|x\| = \|y\| 2^{1/p}$ e $\|x + y\| = \|x - y\| = 2$. Logo

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 8 \neq 2(2^{2/p} + 2^{2/p}) \text{ para } p \neq 2. \tag{19}$$

Teorema (Identidade de Polarização): Para todo x, y em um espaço com produto interno X, temos

- $4\left\langle x, y\right\rangle = \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2$ se X é complexo.
- $4\left\langle x, y\right\rangle = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2$ se X real.

Lema: Se em um espaço com produto interno, $x_n \to x$ e $y_n \to y$, então $\langle x_n, y_n \rangle \to \langle x, y \rangle$.
Demonstração:

$$
\begin{aligned}
|\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| &= |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_n, y \rangle + \langle x_n, y \rangle - \langle x, y \rangle| \\
&\leq |\langle x_n, y_n - y \rangle| + |\langle x_n - x, y \rangle| \\
&\leq \|x_n\| \|y_n - y\| + \|x_n - x\| \|y\| \to 0
\end{aligned}
\tag{20}
$$

quando $n \to \infty$.

Vejamos agora que todo espaço com produto interno pode ser completado para um espaço de Hilbert. Para isso, definimos um isomorfismo de X (espaço com produto interno) para $\tilde{X}$ (espaço com produto interno) como um operador linear e bijetivo tal que

$$
\langle Tx, Ty \rangle_{\tilde{X}} = \langle x, y \rangle_X \, . \tag{21}
$$

Note que T também é isometria, pois

$$
\begin{aligned}
\tilde{d}(Tx, Ty) = \|Tx - Ty\| &= \langle Tx - Ty, Tx - Ty \rangle^{1/2} = \langle T(x-y), T(x-y) \rangle^{1/2} \\
&= \langle x - y, x - y \rangle^{1/2} = \|x - y\| = d(x, y).
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Teorema: Para qualquer espaço com produto interno X, existe um espaço de Hilbert e um isomorfismo A de X em um subespaço denso $W \subset H$. O espaço de Hilbert é único a menos de isomorfismo.

Demonstração: Existe um espaço de Banach H e uma isometria A de X em um subespaço W de H que é denso em H. Defina

$$
\langle \hat{x}, \hat{y} \rangle = \lim_{n \to \infty} \langle x_n, y_n \rangle \, . \tag{23}
$$

Note que (para o caso real)

$$
\langle Ax, Ay \rangle = (\|Ax + Ay\|^2 - \|Ax - Ay\|^2)/4 = (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)/4 = \langle x, y \rangle \, . \tag{24}
$$

A é isomorfismo de X em W.