O Teorema de Hahn-Banach

Um funcional sublinear p em um espaço vetorial X é um funcional p tal que

$$\begin{aligned} p(x+y) &\leq p(x)+p(y) \ \ \forall x,y \in X \\ p(\alpha x) &= \alpha p(x) \ \ \forall \alpha \geq 0 \ \forall x \in X. \end{aligned} \tag{1}$$

Teorema: Seja X espaço vetorial real e p um funcional sublinear em X. Seja f funcional linear definido em um subespaço Z de X e tal que

$$f(x) \leq p(x) \ \ \forall x \in Z. \tag{2}$$

Então f possui uma extensão linear $\tilde{f}$ de Z em X tal que

$$\tilde{f}(x) \leq p(x) \ \ \forall x \in X. \tag{3}$$

Demonstração:

a) Seja E o conjunto de todas as extensões lineares g de f tais que

$$g(x) \leq p(x) \ \ \forall x \in \mathcal{D}(T). \tag{4}$$

Como $f \in E$, temos que $E \neq \emptyset$. Em E, defina o ordenamento parcial por

$$\begin{aligned} &g \leq h \ \text{ se } H \text{ é uma extensão de g} \\ &\left(\mathcal{D}(g) \subset \mathcal{D}(h) \text{ e } h(x) = g(x) \ \forall x \in \mathcal{D}(g)\right). \end{aligned} \tag{5}$$

Para qualquer conjunto linearemente ordenado $C \subset E$, defina

$$\hat{g}(x) = g(x) \text{ se } x \in \mathcal{D}(g) \ \ (g \in C). \tag{6}$$

Temos que $\hat{g}$ é funcional linear com domínio

$$\mathcal{D}(\hat{g}) = \bigcup_{g \in C} \mathcal{D}(g). \tag{7}$$

Vejamos primeiramente que $\mathcal{D}(\hat{g})$ é espaço vetorial. Para isso, sejam $x,y \in \mathcal{D}(\hat{g})$. Então $x \in \mathcal{D}(g_1)$ e $y \in \mathcal{D}(g_2)$ para $g_1, g_2 \in C$. Mas como (sem perda de generalidade) $\mathcal{D}(g_1) \subset \mathcal{D}(g_2)$ (já que C é linearmente ordenado), temos

$$x+y \in \mathcal{D}(g_2) \subset \bigcup_{g \in C} \mathcal{D}(g). \tag{8}$$

Além disso, $\alpha x \in mathcal D(g_1) \subset \bigcup_{g \in C} \mathcal{D}(g)$.

Note também que $\hat{g}$ está bem definifo, pois se $x \in \mathcal{D}(g_1) \cap \mathcal{D}(g_2)$, $g_1, g_2 \in C$, temos

$$g_1(x) = g_2(x) \ \text{ pois } \ C \, \text{é totalmente ordenado} (g_1 \leq g_2 \, \text{ou} \, g_2 \leq g_1). \tag{9}$$

Temos $g \leq \hat{g} \ \forall g \in C$, logo $\hat{g}$ é limite superior para C. Pelo Lema de Zorn, E possui um elemento maximal $\tilde{f}$. Pela definição de E, $\tilde{f}$ é extensão linear de f e satisfaz

$$\tilde{f}(x) \leq p(x) \ \ \forall \, x \in \mathcal{D}(\tilde{f}). \tag{10}$$

b) Mostraremos agora que $\mathcal{D}(\tilde{f}) = X$. Para isso, suponha o contrário. Podemos assim tomar $y_1 \in X - \mathcal{D}(\tilde{f})$ e considerar o subespaço Y_1 de X gerado por $\mathcal{D}(\tilde{f})$ e y_1. Note que $y_1 \neq 0$, já que $0 \in \mathcal{D}(\tilde{f})$. Se $x \in Y_1$, temos
$$x = y + \alpha y_1. \tag{11}$$
Note que esta representação é única, pois
$$y + \alpha y_1 = \tilde{y} + \beta y_1 \Rightarrow y - \tilde{y} = (\beta - \alpha) y_1 \in \mathcal{D}(\tilde{f}) \Rightarrow y_1 \in \mathcal{D}(\tilde{f}), \tag{12}$$
o que não é verdade.

Defina em Y_1
$$g_1(y + \alpha y_1) = \tilde{f}(y) + \alpha c, \;\; c \text{ constante real.} \tag{13}$$
Note que g_1 é linear, pois
$$\begin{aligned} g_1((y + \alpha y_1) + (\tilde{y} + \beta y_1)) &= g_1((y + \tilde{y}) + (\alpha + \beta) y_1) = \\ &= \tilde{f}(y + \tilde{y}) + (\alpha + \beta) c \\ &= \tilde{f}(y) + \alpha c + \tilde{f}(\tilde{y}) + \beta c \\ &= g_1(y + \alpha y_1) + g_2(\tilde{y} + \beta y_1). \end{aligned} \tag{14}$$
Além disso
$$g_1(\gamma(y + \alpha y_1)) = (\gamma \alpha) c = \gamma g_1(y + \alpha y_1). \tag{15}$$
Para $\alpha = 0$, temos $g_1(y) = \tilde{f}(y)$, o que implica que g_1 é extensão própria de $\tilde{f}$ $(\mathcal{D}(\tilde{f}) \subsetneq \mathcal{D}(g_1))$.

Falta mostrar que $g_1 \leq p(x)$ $\forall x \in \mathcal{D}(g_1)$, o que irá contradizer o fato de $\tilde{f}$ ser maximal e, portanto concluiremos que $\mathcal{D})\tilde{f}) = X$.

c) Sejam $y, z \in \mathcal{D}(\tilde{f})$. temos
$$\tilde{f}(y) = \tilde{f}(z) = \tilde{f}(y - z) \leq p(y - z) = p(y - y_1 + y_1 - z) \leq p(y + y_1) + p(-y_1 - z). \tag{16}$$
Logo
$$-p(-y_1 - z) - \tilde{f}(z) \leq p(y + y_1) - \tilde{f}(y). \tag{17}$$
Note que o lado esquerdo independe de y e o lado direito independe de z. Tomemos o sup do lado esquerdo e o inf do lado direito. Seja
$$\begin{aligned} m_0 &= \sup_{z \in \mathcal{D}(\tilde{f}} -p(-y_1 - z) - \tilde{f}(z) \\ m_1 &= \inf_{y \in \mathcal{D}(\tilde{f})} p(y + y_1) - \tilde{f}(y). \end{aligned} \tag{18}$$
Temos $m_0 \leq m_1$. Para $m_0 \leq c \leq m_1$m, temos
$$\begin{aligned} &- p(-y_1 - z) - \tilde{f}(z) \leq c \;\; \forall z \in \mathcal{D}(\tilde{f}) \\ &c \leq p(y + y_1) - \tilde{f}(y) \;\; \forall y \in \mathcal{D}(\tilde{f}). \end{aligned} \tag{19}$$
Seja agora $\alpha < 0$ (troque z por $\alpha^{-1} y$)
$$\begin{aligned} -p(-y_1 - z) - \tilde{f}(z) \leq c &\Rightarrow (-\alpha)(-p(-y_1 - z) - \tilde{f}(z)) \leq (-\alpha) c \\ &\Rightarrow \alpha p(-y_1 - y/\alpha) + \tilde{f}(y) \leq -\alpha c. \end{aligned} \tag{20}$$

Mas $y + \alpha x_1 = x$, logo

$$g_1(x) = \tilde{f}(y) + \alpha c \leq -\alpha p(-y_1 - y/\alpha) = p(\alpha y_1 + y) = p(x). \tag{21}$$

Para $\alpha = 0$, temos $x \in \mathcal{D}(\tilde{f})$ e pronto. Para $\alpha > 0$, temos

$$\alpha c \leq \alpha(p(y/\alpha + y_1) - \tilde{f}(y/\alpha)) \Rightarrow \alpha c \leq p(x) - \tilde{f}(y) \Rightarrow g_1(x) \leq p(x). \tag{22}$$

Veremos agora (sem demonstrar) a versão complexa do Teorema de Hahn-Banach.
Teorema: Seja X espaço vetorial real ou complexo e $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} p(x+y) \leq p(x) + p(y) \quad \forall x, y \in X \\ p(\alpha x) = |\alpha| p(x) \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}\ \forall x \in X. \end{aligned} \tag{23}$$

Seja $f : Z \subset X \longrightarrow \mathbb{K}$ funcional linear (Z subespaço de X) tal que

$$|f(x) \leq p(x)|. \tag{24}$$

Então f possui uma extensão $\tilde{f}$ de Z para X tal que

$$|\tilde{f}(x)| \leq p(x) \ \ \forall x \in X. \tag{25}$$

Espaços Normados

Teorema: Seja f funcional llinear limitado em um subespaço Z de um espaço normado X. Então existe funcional linear limitado $\tilde{f}$ em X que é uma extensão de f em X e tal que

$$\|\tilde{f}\|_X = \|f\|_Z, \tag{26}$$

onde

$$\|\tilde{f}\|_X = \sup_{x \in X, \|x\|=1} |\tilde{f}(x)|, \ \ \|f\|_Z = \sup_{x \in Z, \|x\|=1} |f(x)| \tag{27}$$

(e $\|f\|_Z = 0$ quando $Z = \{0\}$).
Demonstração: Se $Z = \{0\}$, então $f = 0$ e temos $\tilde{f} = 0$. Se $Z \neq \{0\}$, temos

$$|f(x)| \leq \|f\|_Z \|x\| \quad \forall x \in Z. \tag{28}$$

Note que definindo

$$p(x) \equiv \|f\|_Z \quad \forall x \in X, \tag{29}$$

temos

$$\begin{aligned} &p(x+y) = \|f\|_Z \|x+y\| \leq \|f\|_Z(\|x\| + \|y\|) = p(x) + p(y) \\ &p(\alpha x) = \|f\|_Z \|\alpha x\| = |\alpha| \|f\|_Z \|x\| = |\alpha| p(x). \end{aligned} \tag{30}$$

Portanto existe $\tilde{f}$ extensão linear de f tal que

$$|\tilde{f}(x)| \leq \|f\|_Z \|x\| \quad \forall x \in X, \tag{31}$$

logo

$$\|tilde f\|_X = \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{|\tilde{f}(x)|}{\|x\|} \leq \|f\|_Z. \tag{32}$$

Claramente $\|\tilde{f}\|_X \geq \|f\|_Z$ pois $\tilde{f}$ é extensão de f. Logo

$$\|\tilde{f}\|_X = \|f\|_Z. \tag{33}$$

Teorema: Seja X espaço normado e $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$. Entãoexiste um funcional linear limitado $\tilde{f}$ em X tal que

$$\|\tilde{f}\| = 1, \ \ \tilde{f}(x_0) = \|x_0\|. \tag{34}$$

Demonstração: Seja $Z = \{\alpha x_0 \in X : \alpha \in \mathbb{K}\}$. Defina em Z o funcional linear

$$f(x) = f(\alpha x_0) = \alpha\|x_0\|. \tag{35}$$

Note que

$$|f(x)| = |\alpha|\|x_0\| = \|\alpha x_0\| = \|x\| \Rightarrow \|f\|_Z = 1. \tag{36}$$

Então existte $\tilde{f} : X \longrightarrow \mathbb{K}$ extemsão linear de f tal que $\|\tilde{f}\| = \|f\| = 1$ e $\tilde{f}(x_0) = f(x_0) = \|x_0\|$.

Exemplo: Seja $X = \mathbb{R}^2$, $x_0 = (\xi_1, \xi_2) \neq 0$. Vejamos que tal $\tilde{f}$ é dado por

$$\tilde{f}(\eta_1, \eta_2) = \frac{1}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}}(\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2) \tag{37}$$

Note que

$$\tilde{f}(\xi_1, \xi_2) = \frac{\xi_1^2 + \xi_2^2}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}} = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} = \|x_0\|. \tag{38}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} |\tilde{f}(\eta_1, \eta_2)| = \frac{1}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}}\,|\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2| &\leq \frac{1}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}}(|\xi_1\eta_1| + |\xi_2\eta_2|) \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}}\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}\sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2} \\ &= \|(\eta_1, \eta_2)\| \end{aligned} \tag{39}$$

Logo $\|\tilde{f}\| = 1$. Tome $x = (\xi_1, \xi_2)$ e temos

$$\frac{|\tilde{f}(\xi_1, \xi_2)|}{\|(\xi_1, \xi_2)\|} = \frac{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}} = 1 \Rightarrow \|\tilde{f}\| = 1. \tag{40}$$

Corolário: Para todo x em um espaço normado X, temos

$$\|x\| = \sup_{f \in X', f \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|f\|}. \tag{41}$$

Logo, se x_0 é tal que $f(x_0) = 0$ para todo $f \in X'$, temos $x_0 = 0$.

Demonstração: Pelo teorema anterior, temos

$$\sup_{f \in X', f \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|f\|} \geq \frac{|\tilde{f}(x)|}{\|\tilde{f}\|} = \frac{\|x\|}{1} = \|x\|. \tag{42}$$

Além disso,

$$|f(x)| \leq \|f\|\|x\| \Rightarrow \|x\| \geq \sup_{f \in X', f \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|f\|}. \tag{43}$$

Temos assim

$$\|x\| = \sup_{f\in X', f\neq 0} \frac{|f(x)|}{\|f\|}. \tag{44}$$

Dado $x \in X$, definimos $g_x \in X''$ por

$$g_x(f) = f(x) \;\; \forall f \in X'. \tag{45}$$

Teorema: $g_x \in X''$ e $\|g_x\| = \|x\|$.
Demonstração:

$$\|g_x\| = \sup_{f\in X', f\neq 0} \frac{|g_x(f)|}{\|f\|} = \sup_{f\in X', f\neq 0} \frac{|f(x)|}{\|f\|} = \|x\|. \tag{46}$$

Temos assim o mapa canônico

$$C : X \longleftrightarrow X'' \tag{47}$$

que leva x em g_x. Note que C é linear

$$C_{\alpha x+\beta y}(f) = f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) = \alpha C_x(f) + \beta C_y(f). \tag{48}$$

Além disso

$$\|g_x - g_y\| = \|g_{x-y}\| = \|x - y\|, \tag{49}$$

logo C é injetivo e preserva norma. Logo

$$C : X \longrightarrow \mathcal{R}(C) \subset X'' \tag{50}$$

é isomorfismo.

Definição: Um espaço normado X é dito reflexivo se $\mathcal{R}(C) = X''$.

Teorema: Se um espaço normado é reflexivo, então é completo.

Demonstração: $X'' = (X')'$ é completo. Como $\mathcal{R}(C) = X''$, temos um isomorfismo entre X e X'', logo X é completo.

Lema: Seja Y subespaço próprio fechado de um espaço normado X. Seja $x_0 \in X - Y$ arbitrário e

$$\delta = \inf_{\tilde{y}\in Y} \|\tilde{y} - x_0\| \tag{51}$$

a distância de x_0 até Y. Então existe $\tilde{f} \in X'$ tal que

$$\|\tilde{f}\| = 1, \;\; \tilde{f}(y) = 0 \;\; \forall y \in Y, \;\; \tilde{f}(x_0) = \delta. \tag{52}$$

Demonstração: Seja $Z \subset X$ o subespaço gerado por Y e x_0. Defina para $z \in \operatorname{span}(Y \cup \{x_0\})$ $(z = y + \alpha x_0)$

$$f(z) = f(y + \alpha x_0) = \alpha\delta. \tag{53}$$

Note que f é linear. Como Y é fechado, então $\delta > 0 \Rightarrow f \neq 0$. Para $\alpha = 0$, temos $f(y) = 0 \;\; \forall y \in Y$. Para $\alpha = 1$ e $y = 0$, temos $f(x_0) = \delta$. Vejamos que f é limitado:

$$|f(z)| = |\alpha|\delta = \alpha \inf_{\tilde{y}\in Y} \|\tilde{y} - x_0\| \leq |\alpha| \left\| -\frac{1}{\alpha} - x_0 \right\| = \|y + \alpha x_0\| = \|z\|. \tag{54}$$

Logo $|f(z)| = 1$. Pela definição de ínfimo, Y contém uma sequência (y_n) tal que $\|y_n - x_0\| \to \delta$. eja $z_n = y_n - x_0$. Então

$$f(z_n) = -\delta. \tag{55}$$

Além disso,

$$\|f\| = \sup_{f\in X', f\neq 0} \frac{|f(z)|}{\|z\|} \geq \frac{|f(z_n)|}{\|z_n\|} = \frac{\delta}{\|z_n\|} \to \frac{\delta}{\delta} = 1. \tag{56}$$

Logo $\|f\| \geq 1$. Pelo teorema de Hahn-Banach, estendemos f para X com a mesma norma.

Teorema: Se X' é separável então X é separável.

Demonstração: Se X' é separável, considere a esfera unitária $U = \{f : \|f\| = 1\} \subset X'$. U contém um subonjunto enumerável denso (f_n). Como $f_n \in U$, temos

$$\|f_n\| = \sup_{\|x\|=1} |f_n(x)| = 1. \tag{57}$$

Pela defninição de supremo, podemos encontrar ponto $x_n \in X$ de norma 1 tais que

$$|f_n(x_n)| \geq \frac{1}{2}. \tag{58}$$

Seja $Y = \overline{\text{span}(x_n)}$. Y é separável. Note que $Y = X$, pois se $Y \neq X$, existe $\tilde{f} \in X'$ com $\|\tilde{f}\| = 1$ e $\tilde{f}(y) = 0\ \forall y \in Y$. Como $x_n \in Y$, temos que $\tilde{f}(x_n) = 0$ para todo n. Logo

$$\frac{1}{2} \leq |f_n(x_n)| = |f_n(x_n) - \tilde{f}(x_n)| = |(f - \tilde{f})(x_n)| \leq \|f_n - \tilde{f}\| \|x_n\|. \tag{59}$$

Como $\|x_n\| = 1$, temos $\|f_n - \tilde{f}\| \geq 1/2$. Mas isso contradiz o fato de (f_n) ser denso em U, pois $\tilde{f} \in U$ ($\|\tilde{f}\| = 1$). Logo $Y = X$.

Exemplo: l^1 não é reflexivo, pois $l^{1'} = l^\infty$ não é separável, enquanto l^1 é.