Espaços Normados de Operadores

Sejam X e Y espaços normados. Definimos $B(X,Y)$ como o conjunto de todos os operadores lineares limitados de X em Y. Com a definição de soma e multiplicação por escalar da forma

$$\begin{aligned}(T_1+T_2)x &= T_1x+T_2x\\ (\alpha T)x &= \alpha Tx\end{aligned} \tag{1}$$

e com a norma

$$\|T\| = \sup_{x\in X-\{0\}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}, \tag{2}$$

temos que $B(X,Y)$ é espaço normado.

Teorema: Se Y é espaço de Banach, então $B(X,Y)$ é espaço de Banach.

Demonstração: Seja (T_n) sequência de Cauchy em $B(X,Y)$. Então dado $\epsilon>0$, existe $N\in\mathbb{N}$ tal que

$$\|T_n-T_m\|<\epsilon \ \ \forall n,m>N. \tag{3}$$

Então, para cada $x\in X$, temos

$$\|T_nx-T_mx\| = \|(T_n-T_m)x\| \le \|T_n-T_m\|\|x\| < \epsilon\|x\|. \tag{4}$$

Fixado x e dado $\bar{\epsilon}>0$, escolha ϵ tal que $\epsilon\|x\|<\bar{\epsilon}$. Assim

$$\|T_nx-T_mx\|<\bar{\epsilon}, \tag{5}$$

o que implica que (T_nx) é de Cauchy em Y. Mas Y é Banach, então (T_nx) converge, digamos, para y. Defina então $T : X \longrightarrow Y$ por $Tx = y$.

Note que

$$\lim_{n\to\infty} \alpha x+\beta z = \lim_{n\to\infty} \alpha T_nx+\beta T_nz = \alpha \lim_{n\to\infty} T_nx + \beta \lim_{n\to\infty} T_nz, \tag{6}$$

o que mostra que T é linear. Além disso, pela continuidade da norma

$$\|T_nx-Tx\| = \|T_nx - \lim_{n\to\infty} T_mx\| = \lim_{m\to\infty} \|T_nx-T_mx\| \le \epsilon\|x\|. \tag{7}$$

Isto mostra que T_n é limitado. Assim $T = T_n-(T_n-T)$ é também limitado.

Temos também

$$\sup_{x\in X-\{0\}} \frac{\|T_nx-Tx\|}{\|x\|} = \|T_n-T\| \le \epsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty} T_n = T. \tag{8}$$

Definição: Seja X espaço normado. O espaço dual X' é definido como o conjunto de todos os funcionais lineares limitados em X.

Note que X' é espaço de Banach com a norma

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)|. \tag{9}$$

Exemplo: Mostraremos que o espaço dual de $\mathbb{R}^n$ é essencialmente $\mathbb{R}^n$. Isto é, existe um isomorfismo entre $\mathbb{R}^{n'}$ e $\mathbb{R}^n$.

Demonstração: Sabemos que $\mathbb{R}^{n'} = \mathbb{R}^{n^*}$. Além disso, para cada $f \in \mathbb{R}^{n^*}$, temos

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \gamma_j, \quad (\gamma_j = f(e_j)). \tag{10}$$

Logo

$$|f(x)| \leq \sum_{j=1}^{n} |\xi_j \gamma_j| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^2} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |\gamma_j|^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |\gamma_j|^2} \|x\|. \tag{11}$$

Logo

$$\|f\| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |\gamma_j|^2}. \tag{12}$$

Tome agora $x = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ e temos

$$|f(x)| = \sum_{j=1}^{n} \gamma^2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |\gamma_j|^2} \|x\|. \tag{13}$$

Concluímos assim que $\|f\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |\gamma_j|^2}$. Logo, o mapa $f \mapsto (\gamma_j)$ preserva norma $\|f\| = \|(\gamma_j)\|$. É um isomorfismo entre $\mathbb{R}^{n'}$ e $\mathbb{R}^n$.

Exemplo: O dual de l^p é l^1, onde $1 < p < \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Demonstração: Sabemos que $(e_k) = (\delta_{kj})$ é base de Schauder para l^p. Logo, se $x \in l^p$, temos

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j e_j. \tag{14}$$

Seja $f \in l^{p'}$. Como f é linear e limitado, temos

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \gamma_j, \;\; (\gamma_j = (f(e_j))). \tag{15}$$

Considere agora $x_n = (\xi_j(n))$ com

$$\xi_j(n) = \begin{cases} \dfrac{|\gamma_j|^q}{\gamma_j}, \text{ se } j \leq n \text{ e } \gamma_j \neq 0 \\ 0, \;\text{ se } j > n \text{ ou } \gamma_j = 0. \end{cases} \tag{16}$$

Temos assim

$$f(x_n) = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j^{(n)} \gamma_j = \sum_{j=1}^{n} |\gamma_j|^q. \tag{17}$$

Logo

$$f(x_n) \leq \|f\| \|x_n\| = \|f\| \left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j^{(n)}|^p \right)^{1/p} = \|f\|| \left(\sum_{j=1}^{n} |\gamma_j|^{(q-1)p} \right)^{1/p} = \|f\|| \left(\sum_{j=1}^{n} |\gamma_j|^q \right)^{1/p}, \tag{18}$$

onde utilizamos o fato de $(q-1)p = q$, já que p e q são expoentes conjugados. Temos assim

$$\|f\| \geq \frac{f(x_n)}{\left(\sum_{j=1}^{n} |\gamma_j|^q\right)^{1/p}} = \left(\sum_{j=1}^{n} |\gamma_j|^q\right)^{1-1/p} = \left(\sum_{j=1}^{n} |\gamma_j|^q\right)^{1/q} \tag{19}$$

No limite quando $n \to \infty$, temos

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} |\gamma_j|^q\right)^{1/q} \leq \|f\| \Rightarrow (\gamma_j) \in l^q. \tag{20}$$

Seja agora $(\beta_j) \in l^q$ e defina

$$g(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \beta_j. \tag{21}$$

Temos que g é linear e limitado por Hölder, logo $g \in l^p p'$. Temos assim um mapa $f \in l^{p'} \mapsto (\gamma_j) \in l^q$, que é bijetivo e linear. Além disso preserva norma, pois

$$|f(x)| = \left|\sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \gamma_j\right| \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\gamma_j|^1\right)^{1/q} = \|x\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\gamma_j|^q\right)^{1/q}. \tag{22}$$

Portanto $\|f\| \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\gamma_j|^q\right)^{1/q}$. Com o que tinhamos antes concluímos que

$$\|f\| = \|(\gamma_j)\|_{l^q}. \tag{23}$$

Logo o mapa $f \in l^{p'} \mapsto (\gamma_j) \in l^q$ é um isomorfismo entre $l^{p'}$ e l^q.