Funcionais Lineares

Definição: Seja X espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Um funcional linear f é um operador linear

$$f : \mathcal{D}(F) \subset X \longrightarrow \mathbb{K} \tag{1}$$

tal que

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x) + f(y), \ \ \forall x, y \in X \\ f(\alpha x) &= \alpha f(x), \ \ \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x, y \in X. \end{aligned} \tag{2}$$

f é limitado se existe c real tal que

$$|f(x)| \leq c\|x\| \ \ \forall x \in \mathcal{D}(f). \tag{3}$$

A norma de f neste caso é definida por

$$\|f\| = \sup_{x \in \mathcal{D}(f)-\{0\}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{x \in \mathcal{D}(f), \|x\|=1} |f(x)|. \tag{4}$$

Note que

$$|f(x)| \leq \|f\|\|x\| \ \ \forall x \in \mathcal{D}(f). \tag{5}$$

Exemplo: $X = (C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$. Seja $t_0 \in (a,b)$ e $f_{t_0} : X \longrightarrow \mathbb{R}$ com

$$f_{t_0}(x) = x(t_0), \ \ x \in C[a,b]. \tag{6}$$

Temos

$$|f_{t_0}| = |x_{t_0}| \leq \max_{t \in [a,b]} |x(t)| = \|x\|_\infty, \ \ \forall x \in X. \tag{7}$$

Portanto $\|f_{t_0}\| \leq 1$. Tome $x = x_0(t)$ com $x_0(t) = 1 \ \forall t \in [a,b]$. Assim

$$\|f_{t_0}\| \geq \frac{|f_{t_0}|}{\|x_0|} = \frac{|x_0(t_0)|}{\|x_0\|} = 1. \tag{8}$$

Logo

$$\|f_{t_0}\| = 1. \tag{9}$$

Exemplo: $X = (C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ com $x_0 \in C[a,b]$ fixo. Defina

$$f(x) = \int_a^b x(t)|x_0(t)|dt. \tag{10}$$

Então

$$|f(x)| = \left|\int_a^b x(t)|x_0(t)|dt\right| \leq \int_a^b |x(t)||x_0(t)|dt \leq \max_{t \in [a,b]} |x(t)| \int_a^b |x_0(t)|dt. \tag{11}$$

Logo

$$\|f\| \leq | \int_a^b |x_0(t)|dt. \tag{12}$$

Tome $x(t) = 1 \Rightarrow \|x\| = 1$ e temos

$$|f(x=1)| = \left|\int_a^b |x_0(t)|dt\right| = \int_a^b |x_0(t)|dt \Rightarrow \|f\| = \int_a^b |x_0(t)|dt. \tag{13}$$

Exemplo: $X = \left(l^1, \|\cdot\|_\infty\right)$. Defina

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \quad \left(x = (\xi_j) \in l^1\right). \tag{14}$$

Tome (x_n) em l^1 com

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} e_i, \tag{15}$$

onde $e_i = (\delta_{ij})$. Note que

$$\|x_n\|_\infty = \left\| \sum_{i=1}^{n} e_i \right\|_\infty = 1 \tag{16}$$

e

$$f(x_n) = \sum_{i=1}^{n} 1 = n. \tag{17}$$

Portanto

$$\frac{|f(x_n)|}{\|x_n\|_\infty} = n, \tag{18}$$

logo f não é limitado.

Exemplo: Seja $a = (\alpha_j) \in l^2$ fixo. Defina

$$f : l^2 \longrightarrow \mathbb{K} \tag{19}$$

da forma

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \alpha_j. \tag{20}$$

Note que a soma acima converge absolutamente por Cauchy-Schwarz. Além disso

$$|f(x)| = \left| \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \alpha_j \right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j||\alpha_j| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^2} \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j|^2}. \tag{21}$$

Logo f é limitado e $\|f\| \leq \|a\|$.

Exemplo: Seja $M = \{t^n : n = 0, 1, 2, \dots\}$ o conjunto dos monômios em $C[0,1]$. M é L.I., logo pode ser estendido para uma base de Hamel B. Cada $f \in C[a,b]$ pode ser escrito unicamente como

$$f = c_1 h_1 + \cdots + c_N h_N \tag{22}$$

para $h_i \in B$ e $c_i \neq 0$, $i = 1, \dots, N$. Para cada $n = 0, 1, 2, \dots$, defina $\varphi_n(x)$ por

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} c_i, & \text{se } h_i = t^n \text{ para algum } i \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{23}$$

Defina o funcional linear φ por

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \varphi_n(x). \tag{24}$$

Para cada x, há somente um número finito de termos nesta soma, logo φ está bem definido. Note que φ não é limitado (e portanto não contínuo) pois para cada $n = 0, 1, 2, \ldots$, temos $\|t^n\| = 1$ e $|\varphi(t^n)| = n$.

Por um procedimento análogo, podemos concluir que todo espaço vetorial normado de dimensão infinita possui funcionais lineares descontínuos definidos neste espaço.

Em seguida, temos um interessante teorema. Para isso, dada uma base de Hamel B para um espaço vetorial X, definamos os funcionais coordenadas $f_b : X \longrightarrow \mathbb{R}$ que associam a cada ponto $x \in X$ sua coordenada na base de Hamel. Isto é, $f(x) = \sum_{b \in B} f_b(x)x$.

Teorema: Seja B base de Hamel de um espaço de Banach X. Seja f_b, $b \in B$ os funcionais coordenadas. Então existem somente um número finito de b's tais que f_b é contúnuo.

Demonstração: Suponha que $\{b_i : i \in \mathbb{N}\}$ é um subconjunto infinito de B tal que f_{b_i} é contínuo. Seja

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{b_i}{\|b_i\|}. \tag{25}$$

Como X é Banach, temos que a série acima converge. Tome $x_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} \frac{b_i}{\|b_i\|}$. Como x_n converge para x, temos que $f_{b_k}(x) = \lim_{n\to\infty} f_{b_k}(x_n) = \frac{1}{2^k}$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Logo o ponto x tem infinitas coordenadas não nulas, o que contradiz o fato de B ser uma base de Hamel.

Com as operações de soma e multiplicação por escalar

$$\begin{aligned} &(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) \\ &(\alpha f)(x) = \alpha f(x), \end{aligned} \tag{26}$$

o conjunto dos funcionais lineares em X formam um espaço vetorial que denotamos por x^* (espaço dual algébrico). O conjunto dos funcionais em X^* é denotado por X^{**} (segundo espaço dual algébrico).

Note que fixado $x \in X$, temos $g_x \in X^{**}$ da forma

$$g_x(f) = f(x). \tag{27}$$

Para vermos que realmente $g_x \in X^{**}$, vejamos que g_x é linear. Ora,

$$g_x(\alpha f_1 + \beta f_2) = (\alpha f_1 + \beta f_2)(x) = \alpha f_1(x) + \beta f_2(x) = \alpha g_x(f_1) + \beta g_x(f_2). \tag{28}$$

Temos assim um mapa de $C : X \longrightarrow X^{**}$ (mapa canônico) da forma $x \mapsto g_x$. Note que C é linear, pois

$$C(\alpha x + \beta y)(f) = g_{\alpha x + \beta y}(f) = f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) = \alpha Cx(f) + \beta Cy(f). \tag{29}$$

Além disso, C é injetivo, pois $Cx = 0 \Rightarrow f(x) = 0$ para todo funcional linear f. Mas note que se $x \neq 0$, existe o funcional coordenada f_x tal que $f_x(x) = 1$. Logo $C_x = 0 \Rightarrow x = 0$. Portanto C é um isomorfismo de X em $\mathcal{R}(C) \subset X^{**}$. Quando $R(C) = X^{**}$, dizemos que X é reflexivo.

Dimensão Finita

Teorema: Seja X espaço normado de dimensão finita. Então todo operador linear em X é limitado.

Demonstração: Seja $\dim X = n$ e $\{e_1, \ldots, e_n\}$ base de X. Então para $x \in X$ temos

$$x = \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j. \tag{30}$$

Logo

$$\|Tx\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} \xi_j T e_j \right\| \leq \sum_{j=1}^{n} |\xi_j| \|Te_j\| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \|Te_i\| \sum_{j=1}^{n} |\xi_j|. \tag{31}$$

Mas sabemos de aulas anteriores que

$$\sum_{j=1}^{n} |\xi_j| \leq \frac{1}{c} \left\| \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j \right\| = \frac{1}{c} \|x\|. \tag{32}$$

Portanto

$$\|Tx\| \leq \frac{1}{c} \left(\max_{1 \leq i \leq n} \|Te_i\| \right) \|x\|. \tag{33}$$

Isto conclui a demonstração.

Seja agora f funcional linear em X com $\dim X = n$. Seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ base de X. Então

$$f(x) = f\left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j \right) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j f(e_j) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \alpha_j, \tag{34}$$

com $\alpha_j = f(e_j)$, $j = 1, \ldots, n$.

Analogamente, dados $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ escalares, defina n funcionais lineares $f_1, \ldots, f_n$ da forma

$$f_j(e_i) = \delta_{ij}. \tag{35}$$

Temos assim um funcional linear da forma

$$f = \alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_n f_n. \tag{36}$$

Teorema: Seja X espaço vetorial com $\dim X = n$ e seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ base de X. Então $\{f_1, \ldots, f_n\}$ é base de X^* e temos $\dim X = \dim X^* = n$.

Demonstração: Note que $\{f_1, \ldots, f_n\}$ é L.I., pois

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_j = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_j(x) = 0 \ \ \forall x \in X. \tag{37}$$

Tome $x = e_i$, $i = 1, \ldots, n$. Então

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_j(e_i) = 0, \ \ i = 1, \ldots, n. \tag{38}$$

Além disso, dado $f \in X^*$, temos

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \alpha_j \tag{39}$$

com $\alpha_j = f(e_j)$. Logo

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \left(\sum_{i=1}^{n} \delta_{ij}\alpha_j \right) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \left(\sum_{i=1}^{n} f_i(e_j)\alpha_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i \left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x) \\ \Rightarrow f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i. \tag{40}$$

Lema: Seja X espaço vetorial de dimensão finita. Se $x_0 \in X$ é tal que $f(x_0) = 0$ para todo $f \in X^*$, então $x \neq 0$.

Demonstração: Seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ base de X e $x_0 = \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j$. Então

$$f(x_0) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \alpha_j = 0 \ \forall f \in X^* \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} \xi_j \alpha_j = 0 \tag{41}$$

para quaisquer escolha de $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Isto claramente implica que $\xi_j = 0$, $j = 1, \ldots, n$.

Teorema: Um espaço vetorial de dimensão finita é reflexivo.

Demonstração:

$$C : X \longrightarrow X^{**} \tag{42}$$

definido por $x \mapsto g_x$ é linear. Além disso $Cx_0 = 0 \Rightarrow$

$$Cx_0(f) = g_{x_0}(f) = f(x_0) = 0 \ \ \forall f \Rightarrow x_) = 0. \tag{43}$$

Logo, existe $C^{-1} : \mathcal{R}(C) \longleftrightarrow X$. Sabemos que $\dim\mathcal{R}(C) = \dim X$. Além disso, temos

$$\dim X^{**} = \dim X^* = \dim X. \tag{44}$$

Portanto $\dim\mathcal{R}(C) = \dim X^{**}$. Portanto $\mathcal{R}(C) = X^{**}$.