Operadores Lineares Limitados

Definição: Sejam X e Y espaços normados e $T : \mathcal{D}(T) \subset X \longrightarrow Y$ operador linear. Dizemos que T é limitado se existe número real c tal que

$$\|Tx\|_Y \leq c\|x\|_X \ \ \forall x \in \mathcal{D}(T). \tag{1}$$

Exemplo: Seja $T : \mathbb{R}^n \longleftarrow \mathbb{R}^m$ operador linear. Seja $x = ($
$alpha_j) \in \mathbb{R}^n$ qualquer. Então

$$\|Tx\|_2^2 = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} T_{ij}\alpha_j \right)^2 \leq \sum_{i=1}^{m} \left[\left(\sum_{j=1}^{n} T_{ij}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2 \right)^{1/2} \right]^2 = \|x\|_2^2 \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} T_{ij}^2. \tag{2}$$

Portanto

$$\|Tx\|_2 \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} T_{ij}^2} \|x\|_2. \tag{3}$$

Exemplo: Seja $k(t, \tau)$ contínua em $[0, 1] \times [0, 1]$. Seja

$$T : C[0, 1] \longrightarrow C[0, 1] \tag{4}$$

tal que

$$Tx(t) = \int_0^1 k(t, \tau)x(\tau)d\tau. \tag{5}$$

Então

$$\begin{aligned} \|Tx\| &= \max_{t \in [0,1]} \left| \int_0^1 k(t, \tau)x(\tau)d\tau \right| \\ &\leq \max_{t \in [0,1]} \int_0^1 |k(t, \tau)||x(\tau)|d\tau \\ &\leq \|x\| \max_{t \in [0,1]} \int_0^1 |k(t, \tau)|d\tau \end{aligned} \tag{6}$$

Exemplo: $\delta_{t_0} : C[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, com $t_0 \in [a, b]$ e $\delta_{t_0}x(t) = x(t_0)$. Note que

$$|\delta_{t_0}x(t)| = |x(t_0)| \leq \max_{t \in [a,b]} x(t) = \|x\|. \tag{7}$$

Exemplo: Seja X o conjunto de todos os polinômios em $[0, 1]$ com a norma do máximo. Defina $T : X \longrightarrow X$ por

$$Tx(t) = x'(t). \tag{8}$$

Tome $x_n(t) = t^n$. Note que $\|x_n\| = 1$ e

$$Tx_n(t) = nt^{n-1} \Rightarrow \|Tx_n\| = n \Rightarrow \frac{\|Tx_n\|}{\|x_n\|} = n \ \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{9}$$

Logo T não é limitado.

Quando T é limitado, definimos a norma de T por

$$\|T\| = \sup_{x\in\mathcal{D}(T)-\{0\}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \equiv \sup_{x\in\mathcal{D}(T),\|x\|=1} \|Tx\|. \tag{10}$$

Note que $\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq \sup_{x\in\mathcal{D}(T)-\{0\}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \|T\|$. Portanto

$$\|Tx\| \leq \|T\|\|x\| \ \ \forall x \in \mathcal{D}(T). \tag{11}$$

Exemplo: Definimos $A : l^\infty \longrightarrow l^\infty$ por

$$(Ax)_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\xi_j \tag{12}$$

com

$$\begin{gathered} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| < \infty \ \ \forall i \in \mathbb{N} \\ \sup_{i\in\mathbb{N}} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| < \infty. \end{gathered} \tag{13}$$

Note que

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}\xi_j| \leq \sup_{j\in\mathbb{N}} |\xi_j| \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|. \tag{14}$$

Como $\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|$ converge, temos que $\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\xi_j$ converge.

Além disso,

$$\left|\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\xi_j\right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}\xi_j| \leq \|x\| \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|. \tag{15}$$

Portanto

$$\sup_{i\in\mathbb{N}} \left|\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\xi_j\right| \leq \|x\| \sup_{i\in\mathbb{N}} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| \Rightarrow \|Ax\| \leq \|x\| \sup_{i\in\mathbb{N}} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| \Rightarrow \|A\| \leq \sup_{i\in\mathbb{N}} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|. \tag{16}$$

Para cada $i \in \mathbb{N}$, escolha $x_i \in l^\infty$ com

$$x_i = (\mathrm{sgn}(a_{i1}), \mathrm{sgn}(a_{i2}), \mathrm{sgn}(a_{i3}), \dots). \tag{17}$$

Temos assim

$$\|Ax_i\| = \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| = \|x_i\| \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| \Rightarrow \sup_{i\in\mathbb{N}} \frac{\|Ax_i\|}{\|x_i\|} = \sup_{i\in\mathbb{N}} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| \leq \sup_{x\in l^\infty-\{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \|A\|. \tag{18}$$

Chegamos assim que

$$\sup_{i\in\mathbb{N}} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| \leq \|A\| \leq \sup_{i\in\mathbb{N}} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| \Rightarrow \|A\| = \sup_{i\in\mathbb{N}} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|. \tag{19}$$

Teorema: $\|\cdot\|$ definida para operadores lineares limitados é mesmo uma norma.

Demonstração:

i) $\|0\| = \sup_{x \neq 0} \|0x\| = 0$.

ii) $\|T\| = 0 \Rightarrow Tx = 0 \ \forall x \in \mathcal{D}(T) \Rightarrow T = 0$.

iii) $\|\alpha T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = |\alpha| \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = |\alpha| \|T\|$.

iv $\|T_1 + T_2\| = \sup_{x \in \mathcal{D}(T_1) \cap \mathcal{D}(T_2) - \{0\}} \|(T_1 + T_2)x\| = \sup_{\|x\|=1} \|T_1 x + T_2 x\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|T_1 x\| + \sup_{\|x\|=1} \|T_2 x\| = \|T_1\| + \|T_2\|$.

Teorema: Seja $T : \mathcal{D}(T) \subset X \longrightarrow Y$ operador linear, com X e Y espaços normados. Então

a) T é contínuo se, e somente se, T é limitado.

b) Se T é contínuo em um ponto, então T é contínuo.

Demonstração:

a) Suponha T contínuo e $x_0 \in \mathcal{D}(T)$ arbitrário. Então dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|Tx - Tx_0\| \leq \epsilon \ \ \forall x \in \mathcal{D}(T), \text{ com } \|x - x_0\| \leq \delta. \tag{20}$$

Seja $y \neq 0$ qualquer em $\mathcal{D}(T)$. Defina

$$x = x_0 + \frac{\delta y}{\|y\|} \Rightarrow x - x_0 = \frac{\delta y}{\|y\|}. \tag{21}$$

Portanto $\|x - x_0\| = \delta$ e como T é linear

$$\epsilon \geq \|Tx - Tx_0\| = \|T(x - x_0)\| = \left\| T \frac{\delta y}{\|y\|} \right\| = \delta \frac{\|Ty\|}{\|y\|}. \tag{22}$$

Mas isto implica que

$$\frac{\|Ty\|}{\|y\|} \leq \frac{\epsilon}{\delta}. \tag{23}$$

Logo T é limitado.

Seja agora T limitado e $T \neq 0$ ($T = 0$ é trivial). Então $\|T\| \neq 0$. Considere $x_0 \in \mathcal{D}(T)$ qualquer. Seja $\epsilon > 0$. Tome $\delta = \frac{\epsilon}{\|T\|}$. Então se $\|x - x_0\| < \delta$, temos

$$\|Tx - Tx_0\| = \|T(x - x_0)\| \leq \|T\| \|x - x_0\| < \epsilon. \tag{24}$$

Exemplo: Seja $X = C[-1, 1]$ com a norma

$$\|x\| = \left(\int_{-1}^{1} |x(t)|^2 dt \right)^{1/2}. \tag{25}$$

Defina $T_0 x(t) = x(0)$ (funcional delta de Dirac). Vejamos que T_0 não é limitado. Para isso, tome $x(t) \in C[-1, 1]$ tal que $x(-1) = x(1) = 0$ e $x(0) \neq 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina

$$x_n(t) = \begin{cases} x(nt), & x \in \left[\frac{-1}{n}, \frac{1}{n} \right] \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{26}$$

Temos

$$\|x_n\| = \left(\int_{-1/n}^{1/n} |x(nt)|dt\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\int_0^1 |x(t)|^2 dt\right)^{1/2} \to 0, \tag{27}$$

quando $n \to \infty$. Porém

$$T_0 x_n(t) = x_n(0) = x(0) \neq 0. \tag{28}$$

Temos assim

$$\begin{aligned} T_0\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) &= T_0 0 = 0, \\ \lim_{n\to\infty} T_0 x_n &= x(0) \neq 0. \end{aligned} \tag{29}$$

Logo T_0 não é contínuo e portanto é não limitado.

Exemplo: $L : l^1 \longrightarrow l^1$ com

$$L(a_1, a_2, a_3, \dots) = (a_2, a_3, a_4, \dots). \tag{30}$$

Note que

$$\|Lx\| = \sum_{n=2}^{\infty} |a_2| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \|x\|, \tag{31}$$

logo L é limitado. Olhemos o núcleo de L. Se $x \in \mathcal{N}(T)$, então

$$Lx = (a_2, a_3, a_4, \dots) = 0 \Rightarrow x = (a_1, 0, 0, \dots). \tag{32}$$

Portanto

$$\mathcal{N}(T) = \operatorname{span}\{e_1\}, \tag{33}$$

onde $e_1 = (1, 0, 0, \dots)$. Logo $\mathcal{N}(T)$ é fechado.

Exemplo: $T : l^1 \longrightarrow l^1$ com

$$T(a_1, a_2, a_3, \dots) = \left(a_1, \frac{a_2}{2}, \frac{a_3}{3}, \dots\right). \tag{34}$$

Note que

$$\|T(a_n)\| = \sum_{j=1}^{\infty} \left|\frac{a_j}{j}\right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |a_j| = \|(a_n)\|. \tag{35}$$

T é limitado. Seu núcleo é $\mathcal{N}(T) = \{0\}$ é fechado. Sua imagem, porém, não é fechada. Para vermos isto, tome

$$x_n = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, 0, 0, \dots\right) \in l^1. \tag{36}$$

Temos assim

$$Tx_n = \left(1, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \dots, \frac{1}{n^2}, 0, 0, \dots\right) \in \mathcal{R}(T). \tag{37}$$

Note que (Tx_n) é de Cauchy, pois

$$\|Tx_m - Tx_n\| = \sum_{i=n+1}^{m} \frac{1}{i^2} < \epsilon, \ \ \forall m > n > N. \tag{38}$$

Dado $y = \left(1, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \dots\right)$, temos

$$\|Tx_n - y\| = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \to 0, \tag{39}$$

qunado $n \to \infty$. Portanto $Tx_n \to y$. Isto mostra que $y \in \overline{\mathcal{R}(T)}$. Porém $y \notin \mathcal{R}(T)$, pois neste caso teríamos $y = Tx$, com $x = (1/j)$. Mas $(1/j) \notin l^1$. Concluímos assim que a imagem de T não é fechada.

Teorema: Seja T operador linear limitado. Então

a) $x_n \to x$ ($x_n, x \in \mathcal{D}(T)$) implica que $Tx_n \to Tx$.

b) O núcleo de T é fechado.

Demonstração:

b) Seja $x \in \overline{\mathcal{N}(T)}$. Então existe sequência (x_n) em $\mathcal{N}(T)$ tal que $x_n \to x$. Logo $Tx_n \to Tx$. Como $Tx_n = 0$, temos $Tx = 0$, o que implica que $x \in \mathcal{N}(T)$.

Dois operadores T_1 e T_2 são iguais quando $\mathcal{D}(T_1) = \mathcal{D}(T_2)$ e $T_1 x = T_2 x$ para todo $x \in \mathcal{D}(T_1) = \mathcal{D}(T_2)$.

A restriçao

$$T|_B \tag{40}$$

de um operador $T : \mathcal{D}(T) \longrightarrow Y$ a um subconjunto $B \subset \mathcal{D}(T)$ é definida por

$$T|_B : B \longrightarrow Y, \ T|_B x = Tx \ \forall x \in B. \tag{41}$$

A extensão de T a $M \supset \mathcal{D}(T)$ é um operador

$$\tilde{T} : M \longrightarrow Y \ \text{ tal que } \tilde{T}|_{\mathcal{D}(T)} = T. \tag{42}$$

Teorema: Seja $T : \mathcal{D}(T) \subset X \longrightarrow Y$ operador linear limitado, com X espaço normado e Y espaço de Banach. Então T tem uma extensão

$$\tilde{T} : \overline{\mathcal{D}(T)} \longrightarrow Y \tag{43}$$

com

$$\|\tilde{T}\| = \|T\|. \tag{44}$$

Demonstração: Seja $x \in \overline{\mathcal{D}(T)}$. Então existe sequência (x_n) em $\mathcal{D}(T)$ tal que $x_n \to x$. Portanto

$$\|Tx_n - Tx_m\| = \|T(x_n - x_m)\| \leq \|T\| \|x_n - x_m\|, \tag{45}$$

o que implica que (Tx_n) é de Cauchy. Logo converge, já que Y é Banach. Seja $Tx_n \to y \in Y$ e defina $\tilde{T}$ por

$$\tilde{T}x = y. \tag{46}$$

Veja que isto independe da sequência escolhida. Para vermos isto, seja $x_n \to x$ e $z_n \to x$. Defina

$$(v_n) = (x_1, z_1, x_2, z_2, \dots) \to \infty. \tag{47}$$

Note que (Tv_n) converge, pois T é limitado e, portanto as duas subsequências (Tx_n) e (Tz_n) convergem para o mesmo limite. Logo $\tilde{T}$ está bem definida para $x \in \overline{\mathcal{D}(T)}$.

Note que $\tilde{T}$ é linear, pois

$$\tilde{T}(\alpha x + \beta z) = \lim_{n \to \infty} T(\alpha x_n + \beta z_n) = \alpha Tx + \beta Tz. \tag{48}$$

Além disso, obviamente $\tilde{T}x = Tx$ para todo $x \in \mathcal{D}(T)$. Então $\tilde{T}$ é extensão de T. Como

$$\|tx_n\| \leq \|T\|\|x_n\|, \tag{49}$$

temos, no limite quando $n \to \infty$

$$\|\tilde{T}x\| \leq \|T\|\|x\|. \tag{50}$$

Logo $\tilde{T}$ é limitado e $\|\tilde{T}\| \leq \|T\|$. Além disso

$$\|\tilde{T}\| = \sup_{x \in \overline{\mathcal{D}(T)} - \{0\}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \geq \sup_{x \in \mathcal{D}(T)} -\{0\} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \|T\|. \tag{51}$$

Logo $\|\tilde{T}\| = \|T\|$.

Por fim, veremos que em u espaço de dimensão finita, todo operador linear é limitado.

Teorema: Se um espaço normado X tem dimensão finita, então todo operador linear em X é limitado.

Demonstração: Seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ base de X. Então

$$\|Tx\| \left\| T\left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j\right) \right\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} \xi_j T e_j \right\| \leq \sum_{j=1}^{n} |\xi_j| \|Te_j\| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \|Te_i\| \sum_{j=1}^{n} |\xi_j|. \tag{52}$$

Ma s sabemos que

$$\sum_{j=1}^{n} |\xi_j| \leq \frac{1}{c}\|x\| \tag{53}$$

para algum $c > 0$. Logo

$$\|Tx\| \leq \left(\frac{1}{c} \max_{1 \leq i \leq n} \|Te_i\|\right) \|x\|. \tag{54}$$