# Operadores Lineares

**Definição:** Um operador linear $T$ é um operador tal que:

i) O domínio $\mathcal{D}(T)$ de $T$ é um espaço vetorial e a imagem $\mathcal{R}(T)$ pertence a um espaço vetorial sobre o mesmo corpo.

ii) $\forall x, y \in \mathcal{D}(T)$ e $\forall \alpha \in K$

$$\begin{aligned} T(x+y) &= Tx + Ty, \\ T(\alpha x) &= \alpha T x. \end{aligned} \tag{1}$$

O núcleo de $T$ é definido por

$$\mathcal{N}(T) = \{x \in \mathcal{D}(T) : Tx = 0\}. \tag{2}$$

Note que $0 \in \mathcal{N}(T)$ já que $T0 = T(0x) = 0Tx = 0$, para $x \in \mathcal{D}(T)$ qualquer.

**Teorema:** Seja $T : \mathcal{D}(T) \subset x \longrightarrow Y$ um operador linear. Então:

a) $\mathcal{R}(T)$ é um espaço vetorial.

b) $\mathcal{N}(T)$ é um espaço vetorial.

c) Se $\dim \mathcal{D}(T) = n < \infty$, então $\dim \mathcal{R}(T) \leq n$.

*Demonstração:*

a) Sejam $y_1, y_2 \in \mathcal{R}(T)$ e $\alpha, \beta \in K$. Mostremos que $\alpha y_1 + \beta y_2 \in \mathcal{R}(T)$. Para isso, note que $y_1 = Tx_1$ e $y_2 = Tx_2$, com $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(T)$. Então $\alpha y_1 + \beta y_2 = \alpha T x_1 + \beta T x_2 = T(\alpha x_1 + \beta x_2)$. Como $\mathcal{D}(T)$ é espaço vetorial, temos que $\alpha x_1 + \beta x_2 \in \mathcal{D}(T)$ e, portanto, $\alpha y_1 + \beta y_2 \in \mathcal{D}(T)$.

b) Sejam $x_1, x_2 \in \mathcal{N}(T)$ e $\alpha, \beta \in K$. Então $T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha T x_1 + \beta T x_2 = \alpha 0 + \beta 0 = 0$. Logo $\alpha x_1 + \beta x_2 \in \mathcal{N}(T)$.

c) Seja $\{y_1, \ldots, y_{n+1}\} \subset \mathcal{R}(\mathcal{T})$. Então $y_i = Tx_i$, com $x_i \in \mathcal{D}(T)$, $i = 1, \ldots, n$. Como $\dim \mathcal{D}(T) = n$, existem escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ não nulos simultaneamentes tais que

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{n+1} x_{n+1} = 0. \tag{3}$$

Logo

$$\alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_{n+1} y_{n+1} = T(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{n+1} x_{n+1}) = T0 = 0. \tag{4}$$

Portanto $\{y_1, \ldots, y_{n+1}\} \subset \mathcal{R}(\mathcal{T})$ é L.D., o que implica que $\dim \mathcal{R}(T) \leq n$.

**Exemplo:** Seja $X$ o espaço vetorial de todos os poliômios em $[a, b]$. Definimos

$$Tx(t) = x'(t). \tag{5}$$

Vemos facilmente que $T$ é operador linear, pela linearidade da derivada.

**Exemplo:**

$$T_1 : C[a, b] \longrightarrow C[a, b], \tag{6}$$

com

$$T_1 x(t) = \int_a^b x(\tau) d\tau. \tag{7}$$

$$T_2 : C[a,b] \longrightarrow C[a,b], \tag{8}$$

com

$$T_2 x(t) = t x(t). \tag{9}$$

**Exemplo:** $T : l^\infty \longrightarrow l^\infty$.

$$T(\xi_j) = \left(\xi_1, \frac{\xi_2}{2}, \frac{\xi_3}{3}, \dots\right) \tag{10}$$

**Exemplo:** $T : l^\infty \longrightarrow l^\infty$.

$$T(\xi_j) = (0, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots) \tag{11}$$

**Exemplo:** Seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ base de $\mathbb{R}^n$ e $\{e'_1, \dots, e'_m\}$ base de $\mathbb{R}^m$. Se $x \in \mathbb{R}^n$, então

$$x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i. \tag{12}$$

Se $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é um operador linear, então

$$y = Tx = T\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i T e_i. \tag{13}$$

Mas $Te_i \in \mathbb{R}^m$, então

$$Te_i = \sum_{j=1}^{m} T_{ji} e'_j. \tag{14}$$

Dessa forma

$$y = Tx = \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} T_{ji}\xi_i\right) e'_j \equiv \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} T_{ij}\xi_j\right) e'_i. \tag{15}$$

Se denotarmos os vetores $x \in \mathbb{R}^n$ na base $\{e_1, \dots, e_n\}$ por e $y \in \mathbb{R}^m$ na base $\{e'_1, \dots, e'_n\}$

$$x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \tag{16}$$

e

$$y = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_m \end{pmatrix} \tag{17}$$

, então

$$y = Tx = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & \cdots & T_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ T_{m1} & T_{m2} & \cdots & T_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Toda transformação linear pode ser representada por uma matriz.

Lembre que se $T : \mathcal{D}(T) \longrightarrow \mathcal{R}(T)$ é bijetivo, então existe $T^{-1} : \mathcal{R}(T) \longrightarrow \mathcal{D}(T)$ tal que $T^{-1}y = x$, onde $Tx = y$. Neste caso

$$\begin{aligned} &T^{-1}Tx = x \ \ \forall x \in \mathcal{D}(T) \\ &TT^{-1}y = y \ \ \forall y \in \mathcal{R}(T). \end{aligned} \tag{19}$$

**Exemplo:** Seja $T : l^1 \longrightarrow l^1$ com $T(\xi_j) = (\frac{\xi_j}{j})$. Note que $T$ é injetivo, pois

$$Tx = Ty \Rightarrow \left(\frac{\xi_j}{j}\right) = \left(\frac{\eta_j}{j}\right) \Rightarrow \frac{\xi_j}{j} = \frac{\eta_j}{j} \Rightarrow \xi_j = \eta_j. \tag{20}$$

Porém não é sobre, pois dado $y = \left(\frac{1}{j^2}\right) \in l^1$, não existe $x \in l^1$ tal que $Tx = y$, pois

$$T(\xi_j) = \left(\frac{1}{j^2}\right) \Rightarrow \frac{\xi_j}{j} = \frac{1}{j^2} \Rightarrow \xi_j = \frac{1}{j} \tag{21}$$

e sabemos que $(1/j) \notin l^1$.

**Exemplo:** Seja $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow R$ definida por

$$y = Tx = a \cdot x, \tag{22}$$

com $a = (1,1) \in \mathbb{R}^2$ fixo. Tome $x_1 = (1,0)$ e $x_2 = (0,1)$. Então $Tx_1 = Tx_2 = 1$ e, portanto, $T$ não é injetivo. Note que

$$T(\lambda, -\lambda) = \lambda - \lambda = 0 \ \ \forall \lambda \in \mathbb{R}. \tag{23}$$

**Teorema:** Seja $T : \mathcal{D}(T) \subset X \longrightarrow Y$ operador linear. Então

a) $T^{-1} : \mathcal{R}(T) \longrightarrow \mathcal{D}(T)$ existe se, e somente se, $Tx = 0 \Rightarrow x = 0$.

b) Se $T^{-1}$ existir é operador linear.

c) Se $\dim\mathcal{D}(T) = n < \infty$ e $T^{-1}$ existir, então $\dim\mathcal{D}(T) = \dim\mathcal{R}(T)$.

*Demonstração:*

a) Se $T^{-1}$ existir, então $T$ é injetiva. Logo se $Tx = 0$, como $T0 = 0$, temos $x = 0$.

   Se $Tx = 0 \Rightarrow x = 0$, sejam $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(T)$ tais que $Tx_1 = Tx_2$. Então, como $T$ é operador linear, temos $T(x_1 - x_2) = 0$, logo $x_1 = x_2$, o que implica que $T$ é injetivo.

b) Sejam $y_1, y_2 \in \mathcal{R}(T)$ e $\alpha, \beta \in K$. Então $y_1 = Tx_1$ e $y_2 = Tx_2$, com $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(T)$. Logo $T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha y_1 + \beta y_2$, o que implica que $T^{-1}(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha x_1 + \beta x_2 = \alpha T^{-1} y_1 + \beta T^{-1} y_2$.

c) Já sabemos que $\dim\mathcal{R}(T) \leq \dim\mathcal{D}(T)$ pelo teorema anterior aplicado a $T$. O mesmo teorema aplicado a $T^{-1}$ nos dá $\dim\mathcal{D}(T) \leq \dim\mathcal{R}(T)$.