Espaços Normados de Dimensão Finita

Lema: Seja $\{x_1, \ldots, x_n\}$ L.I. em $(X, \|\cdot\|)$ (de qualquer dimensão). Então existe $c > 0$ tal que

$$\|\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n\| \geq c(|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|) \tag{1}$$

para todo $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$.

Demonstração: Seja $s = |\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|$. Se $s = 0$ então $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$ e portanto (1) vale para todo c. Seja $s \neq 0$. Então (1) é equivalente a

$$\|\beta_1 x_1 + \cdots + \beta_n x_n\| \geq c \tag{2}$$

com $\sum_{j=1}^n |\beta_j| = 1$, onde $\beta_j = \alpha_j / s$, $j = 1, \ldots, n$. Mostremos que (2) vale para todo $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ com $\sum_{j=1}^n |\beta_j| = 1$. Para isto, suponha que (2) é falso. então para todo $c > 0$, existe $\beta_1, \ldots, \beta_n$ com $\sum_{j=1}^n |\beta_j| = 1$ e tal que

$$\|\beta_1 + \cdots + \beta_n\| < c. \tag{3}$$

Tome $c = \frac{1}{m}$, $m \in \mathbb{N}$. Então existe sequência (y_m) de vetores

$$y_m = \beta_1^{(m)} x_1 + \cdots + \beta_n^{(m)} x_n, \quad \left(\sum_{j=1}^n |\beta_j^{(m)}| = 1 \right) \tag{4}$$

tal que

$$\|y_m\| \leq \frac{1}{m} \to 0 \tag{5}$$

quando $m \to \infty$. Como $\sum_{j=1}^n |\beta_j^{(m)}| = 1$, temos $|\beta_j^{(m)}| \leq 1$, $j = 1, \ldots, n$. Logo, fixando j, temos

$$\left(\beta_j^{(m)}\right) = \left(\beta_j^{(1)}, \beta_j^{(2)}, \beta_j^{(3)}, \ldots\right) \tag{6}$$

é limitada. Logo (Bolzano-Weierstrass), $(\beta_1^{(m)})$ possui uma subsequência convergente. Seja β_1 o limite dessa subsequência e $(y_{1,m})$ a correspondente subsequência de (y_m). Procedendo, temos $(y_{1,m})$ tem uma subsequência $(y_{2,m})$ na qual a correspondente sequência $(\beta_2^{(m)})$ converge. Seja β_2 o limite. Depois de n passos, temos uma subsequência $(y_{n,m}) = (y_{n,1}, y_{n_2}, \ldots)$ de (y_m) cujos termos são da forma

$$y_{n,m} = \sum_{j=1}^n \gamma_j^{(m)}, \quad \left(\sum_{j=1}^n |\gamma_j^{(m)}| = 1 \right), \tag{7}$$

onde $\gamma_j^{(m)} \to \beta_j$ quando $m \to \infty$. Logo, para $m \to \infty$, temos

$$y_{n,m} \to y = \sum_{j=1}^n \beta_j x_j, \tag{8}$$

onde $\sum_{j=1}^n |\beta_j| = 1$ e, portanto, nem todo $\beta_j = 0$. Como $\{x_1, \ldots, x_n\}$ é L.I., temos que $y \neq 0$. Mas $y_{n,m} \to y$ implica que $\|y_{n,m}\| \to \|y\|$ (pela continuidade da norma). Como $\|y_m\| \to 0$, temos que $\|y_{n,m}\| \to 0$, pois é uma subsequência. Logo $\|y\| = 0 \Rightarrow y = 0$. Mas isto contradiz $y \neq 0$, o que prova o lema.

Teorema: Todo subespaço de dimensão finita Y de um espaço normado X é completo. Em particular, todo espaço normado de dimensão finita é completo.

Demonstração: Seja (y_m) sequência de Cauchy qualquer em Y. Seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ base de Y. Então
$$y_m = \alpha_1^{(m)} e_1 + \cdots + \alpha_n^{(m)} e_n. \tag{9}$$
Dado $\epsilon > 0$, existe N tal que
$$c \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(r)}| \leq \left\| \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(r)}) e_i \right\| = \|y_m - y_r\| < \epsilon, \tag{10}$$
para algum $c > 0$. Assim
$$|\alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(r)}| \leq \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(r)}| < \frac{\epsilon}{2} \;\; \forall m, r > N \; j = 1, 2, \ldots, n. \tag{11}$$
logo $(\alpha_j^{(m)})$ é de Cauchy, $j = 1, 2, \ldots, n$ e, portanto,
$$\alpha_j^{(m)} \to \alpha_j \tag{12}$$
quando $m \to \infty$.

Defina
$$y = \alpha_1 e_+ \cdots + \alpha_n e_n \in Y. \tag{13}$$
Temos
$$\|y_m - y\| = \left\| \sum_{j=1} n(\alpha_j(m) - \alpha_j) e_j \right\| \leq \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j^(m) - \alpha_j| \|e_j\| \to 0 \tag{14}$$
quando $m \to \infty$. Portanto $y_m \to y$. Logo Y é completo.

Corolário: Todo subespaço Y de dimensão finita de um espaço normado é fechado em X.

Exemplo: Seja $X = C[0,1]$ e $Y = \text{span}\{x_0, x_1, \ldots\}$ com $x_j(t) = t^j$. Y não possui dimensão finita. Y não é fechado em X, pois pelo Teorema de Aproximação de Wierstrass, dada uma função contínua $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, existe sequência de polinômios de $[0,1]$ em $\mathbb{R}$ que converge uniformemente para f.

Definição: Duas normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ em um espaço normado X são chamadas equivalentes se existirem duas constantes positivas $c_1, c_2 > 0$ tais que
$$c_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1 \;\; \forall x \in X. \tag{15}$$

- Normas equivalentes implicam em métricas equivalentes, que implicam em mesma topologia.
- Normas equivalentes implicam em mesmas sequências de Cauchy.

Lembre que l^1 é completo na norma $\|\cdot\|_{l^1}$, mas não é completo na norma $\|\cdot\|_{l^\infty}$. Logo $\|\cdot\|_{l^1}$ e $\|\cdot\|_{l^\infty}$ não são equivalentes.

Porém,

Proposição: Se X é um espaço de dimensão infinita, então todas as normas são equivalentes.

Demonstração: Seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ base de X. Para cada $x \in X$, existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tal que
$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i. \tag{16}$$

Defina $\|x\|_0 = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|$. Claramente $\|\cdot\|_0$ é norma em X. mostremos que qualquer norma em X é equivalente a $\|\cdot\|_0$.

Seja $\|\cdot\|$ outra norma em X. Então

$$\|x\| = \left\|\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i\right\| \leq \sum_{j=1}^n |\alpha_i|\|e_i\| \leq \max_{1\leq j\leq n}\{\|e_j\|\}\sum_{j=1}^n |\alpha_j| = C\|x\|_0. \tag{17}$$

Além disso, existe $c > 0$ tal que

$$\|x\| \geq c(|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|), \tag{18}$$

logo

$$c\|x\|_0 \leq \|x\| \leq C\|x\|_0. \tag{19}$$

Exemplo: Seja $\mathbb{C}^n$ com as métricas

$$\begin{aligned} \|x\|_\infty &= \max_{1\leq j\leq n}\|\xi_j\|, \\ \|x\|_p &= \left(\sum_{j=1}^n |\xi_j|^p\right)^{1/p}. \end{aligned} \tag{20}$$

Então

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^n |\xi_j|^p\right)^{1/p} \geq (|\xi_i|^p)^{1/p} = |\xi_i|, \;\; i = 1, 2, \ldots, n \Rightarrow \|x\|_p \geq \|x\|_\infty. \tag{21}$$

Além disso,

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^n |\xi_j|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{j=1}^n \max_{1\leq i\leq n}\{|\xi_i|^p\}\right)^{1/p} = \|x\|_\infty\left(\sum_{j=1}^n 1\right)^{1/p} = n^{1/p}\|x\|_p. \tag{22}$$

Portanto

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{1/p}\|x\|_\infty. \tag{23}$$

Exemplo:

Lema de Riesz

Teorema: Seja X espaço vetorial normado e $Y \subset X$ subespaço fechado tal que $Y \neq X$. Então, dado $\epsilon > 0$, existe $x \in X$ tal que

$$\|x\| = 1 \;\text{ e }\; \operatorname{dist}(x, Y) = \inf_{y\in Y}\|x - y\| \geq 1 - \epsilon. \tag{24}$$

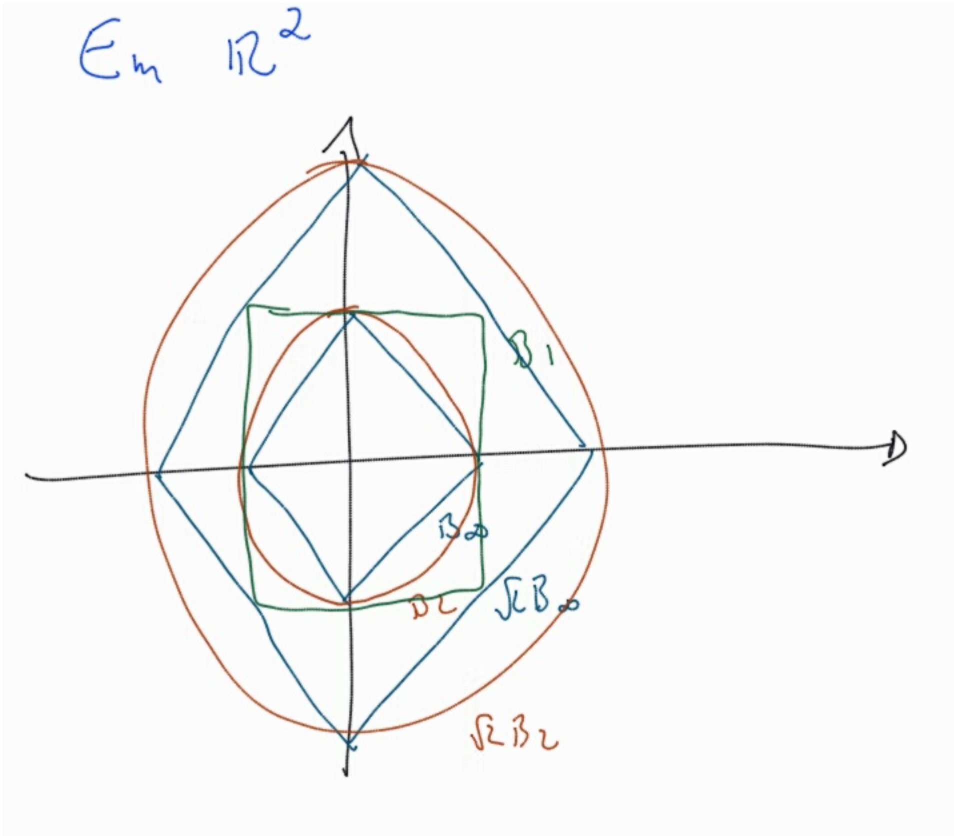
Demonstração: Seja $\tilde{x} \in X - Y$. Como Y é fechado, a distância entre $\tilde{x}$ e Y é estritamente positiva.

Seja

$$d = \operatorname{dist}(\tilde{x}, Y) > 0. \tag{25}$$

Dado $\epsilon > 0$, existe $\tilde{y} \in Y$ tal que

$$d \leq \|\tilde{x} - \tilde{y}\| \leq \frac{d}{1-\epsilon}. \tag{26}$$



Segue que $\forall y \in Y$

$$\left\| \frac{\tilde{x} - \tilde{y}}{\|\tilde{x} - \tilde{y}\|} - y \right\| = \frac{1}{\|\tilde{x} - \tilde{y}\|} \|\tilde{x} - \tilde{y} - \|\tilde{x} - \tilde{y}\| y\| \geq \frac{d}{\|\tilde{x} - \tilde{y}\|} \geq \frac{d(1-\epsilon)}{d} = 1 - \epsilon, \tag{27}$$

onde utilizamos o fato de $-\tilde{y} - \|\tilde{x} - \tilde{y}\| y$ ser um elemento de Y. Portanto o vetor

$$x = \frac{\tilde{x} - \tilde{y}}{\|\tilde{x} - \tilde{y}\|} \tag{28}$$

satisfaz

$$\mathrm{dist}(x, Y) \geq 1 - \epsilon \tag{29}$$

e

$$\|x\| = 1. \tag{30}$$

Compacidade

Definição: Um espaço métrico X é dito compacto se toda sequência em X possui uma subsequência convergente. $M \subset X$ é dito compacto se M é compacto considerado como subespaço de X.

Lema: Seja $M \subset X$ compacto. Então M é fechado e limitado.

Demonstração: Seja $x \in \bar{M}$. Então existe sequência (x_n) em M tal que $x_n \to x$. Como M é compacto, existe (x_{n_j}) com $x_{n_j} \to y \in M$. Logo $x = y \in M$ e, portanto, $\bar{M} \subset M$, o que implica que M é fechado.

Suponha M não limitado. Então $\forall n \in \mathbb{N}$, existe $y_n \in M$ tal que $d(y_n, b) > n$ para algum b fixo. Esta sequência não possui subsequência convergente, já que toda sequência convergente é limitada.

Exemplo: Seja $\{e_n\}_n = 1^\infty$ em l^2, onde $e_n = (\delta_{nj})$. Note que $\{e_n\}$ e limitado, pois $\|e_n\| = 1$. Alem disso, $\{e_n\}$ e fechado em l^2, pois

$$B(e_n; 1/2) \cap M = \{e_n\}. \tag{31}$$

M é fechado e limitado, mas não é compacto, pois (e_n) não possui subsequência convergente.

Teorema: Seja X espaço vetorial normado no qual a bola unitária fechada $B[0;1]$ é compacta. Então X possui dimensão finita.

Demonstração: Suponha que X não seja de dimensão finita. Então seja $x_1 \in X$ com $\|x_1\| = 1$. Considere $M_1 = \text{span}\{x_1\}$. Pelo Lema de Riez (com $\epsilon = 1/2$), existe $x_2 \in X - M_1$ com $\|x_2\| = 1$ e $\|x_2 - x_1\| \geq 1/2$. Defina $M_2 = \text{span}\{x_1, x_2\}$ e seja $x_3 \in X - M_2$ com $\|x_3\| = 1$ e com $\text{dist}(x_3, M_2) \geq 1/2$. Procedendo, obtemos uma sequência (x_n) em X com $\|x_n\| = 1$ para todo n e com $\|x_n - x_m\| \geq 1/2$ sempre que $m \neq n$. Esta sequência não possui subsequência convergente, contradizendo o fato de $B[0;1]$ ser compacta.

Teorema: Seja X espaço vetorial normado de dimensão finita. Então $M \subset X$ é compacto se, e somente se, é fechado e limitado.

Demonstração: A ida já foi demonstrada. Vejamos a volta. Seja (x_n) sequência em M. Então

$$x_m = \xi_1^{(m)} e_1 + \cdots + \xi_n^{(m)} e_n. \tag{32}$$

Como M é limitado, temos que $\|x_m\| \leq k$ para todo m. portanto

$$k \geq \|x_m\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} \xi_j^{(m)} e_j \right\| \geq c \sum_{j=1}^{n} |\xi_j^{(m)}|, \tag{33}$$

para algum $c > 0$. Assim

$$|\xi_j^{(m)}| \leq \frac{k}{c}, \;\; j = 1, 2, \ldots, n. \tag{34}$$

Logo possui uma subsequência convergente. Assim (x_m) possui uma subsequência convergente (z_m) que converge para $z = \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j$. Como M é fechado temos que $z \in M$. Logo M é compacto.

Teorema: Seja X espaço vetorial normado e Y subespaço próprio fechado de dimensão finita de X. Então existe $\bar{x} \in X$ tal que $\|x\| = 1$ e $\text{dist}(\bar{x}, Y) = 1$.

Demonstração: Como Y possui dimensão finita, é fechado. Dado $x \in X$, $x \neq Y$ e $\delta_1 > \delta = \text{dist}(x, Y)$ então $B[x; \delta_1] \cap Y$ é fechado, limitado e não vazio e, portanto, compacto. Existe assim um ponto y_0 desse conjunto tal que $d(x, y_0) = \text{dist}(x, B[x; \delta_1] \cap Y)$. Mas $\text{dist}(x, B[x; \delta_1] \cap Y) = \text{dist}(x, Y)$ e, então, basta tomar $\bar{x} = \frac{x - y_0}{\|x - y_0\|}$:

$$\text{dist}(\bar{x}, Y) = \frac{1}{\|x - y_0\|} \text{dist}(x - y_0, Y) = \frac{1}{\|x - y_0\|} \text{dist}(x, Y) = \frac{\text{dist}(x, y_0)}{\|x - y_0\|} = 1. \tag{35}$$

Teorema: Sejam X e Y espaços métricos e $T : X \longrightarrow Y$ aplicação contínua. Se $M \subset X$ é compacto, então $T(M) \subset Y$ é compacto.

Demonstração: Seja (y_n) sequência qualquer em $T(M)$. Temos $y_n = Tx_n$ com (x_n) sequência em M. Como M é compacto, (x_n) possui subsequência convergente $\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = x \in M$. Como T é aplicação contínua, temos $y_{n_k} = Tx_{n_k} \to Tx \in T(M)$, isto é, (y_n) possui uma subsequência convergente em $T(M)$. Portanto $T(M)$ é compacto.

Teorema: Seja $T : X \longrightarrow \mathbb{R}$ aplicação contínua de um espaço métrico X em $\mathbb{R}$. Se $M \subset X$ é compacto, então T assume máximo e mínimo em M.

Demonstração: Pelo teorema anterior, $T(M) \subset \mathbb{R}$ é compacto e, portanto, fechado e limitado. Dessa forma, $\inf T(M) \in M$ e $\sup T(M) \in T(M)$. As imagens inversas desses doi valores correpondem aos valores de mínimo e máximo em M, respectivamente.