Convergência em Espaços Normados

Definição:

i) (x_n) em $(X, \|\cdot\|)$ é convergente se existe $x \in X$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0. \tag{1}$$

ii) (x_n) em $(X, \|\cdot\|)$ é Cauchy se dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_m - x_n\| < \epsilon \ \ \forall m, n > N. \tag{2}$$

Dada um sequência (x_k) em $(X, \|\cdot\|)$, associamos a sequência (s_n) de somas parciais (já que estamos em um espaço vetorial podemos somar)

$$s_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n. \tag{3}$$

Se (s_n) converge, isto é, existe $s \in X$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s, \tag{4}$$

dizemos que a série infinita

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k \tag{5}$$

converge e

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} x_k. \tag{6}$$

Se a série real

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| \tag{7}$$

converge, a série é dita absolutamente convergente.

Teorema: $(X, \|\cdot\|)$ é Banach se, e somente se, toda série absolutamente convergente é convergente.

Demonstração: Considere, primeiramente, $(X, \|\cdot\|)$ Banach e seja (x_n) sequência tal que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \infty. \tag{8}$$

Seja

$$s_N = \sum_{n=1}^{N} x_n. \tag{9}$$

Para $N, M \in \mathbb{N}$ com $N > M$. temos

$$\|s_N - s_M\| = \left\| \sum_{n=M+1}^{N} x_n \right\| \leq \sum_{n=M+1}^{N} \|x_n\|, \tag{10}$$

que tende a zero quando $M \to \infty$. Assim (s_N) é de Cauchy e portanto convergente em X, que é Banach.

Se, agora, toda série absolutamente convergente em X é convergente, fixe (x_n) de Cauchy em X qualquer. Então é possíve selecionar $n_1 < n_2 < \dots$ de maneira que

$$\|x_n - x_m\| < \frac{1}{2^j} \tag{11}$$

para quaisquer $n, m \geq n_j$. tome

$$\begin{aligned} y_1 &= x_{n_1} \\ y_j &= x_{n_j} - x_{n_{j-1}},\, j \geq 2. \end{aligned} \tag{12}$$

Então

$$\sum_{j=1}^{k} y_j = x_{n_k} \tag{13}$$

e

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|y_j\| = \|y_1\| + \sum_{j=1}^{\infty} \|x_{n_j} - x_{n_{j-1}}\| \leq \|y_1\| + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{2^j} < \infty. \tag{14}$$

Portanto existe

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \sum_{j=1}^{\infty} y_{n_j}. \tag{15}$$

Como (x_n) é de Cauchy e possui uma subsequência convergente, então (x_n) converge.

De fato: seja $a = \lim_{k\to\infty}^{x_{n_k}}$. Dado $\epsilon > 0$, tome n_0 tal que

$$\|x_{n_k} - x_{n_j}\| < \frac{\epsilon}{2} \ \ \forall j, k \geq n_0 \tag{16}$$

e também

$$\|x_{n_k} - a\| < \frac{\epsilon}{2}\, \forall k \geq n_0. \tag{17}$$

Segue que para $n \geq n_0$

$$\|x_n - a\| \leq \|x_n - x_{n_0}\| + \|x_{n_0} - a\| < \epsilon. \tag{18}$$

Base de Schauder

Se um espaço normado contém uma sequência (e_n) com a propriedade que $\forall x \in X$, existe única sequência de escalares (α_n) tal que

$$\|x - (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n)\| \to 0, \tag{19}$$

quando $n \to \infty$, então (e_n) é chamada base de Schauder. A série

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k \tag{20}$$

é chamada a expansão de x na base (e_n).

Exemplo: Note que l^p possui uma base de Schauder (e_n), onde $e_n = \delta_{nj}$.

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, \dots), \\ e_2 &= (0, 1, 0, 0, \dots), \\ e_3 &= (0, 0, 1, 0, \dots),\ \ \dots. \end{aligned} \tag{21}$$

Dado $x = (\xi_j) \in l^p$, temos

$$\|x - \xi_1 e_1 - \xi_2 e_2 - \cdots - \xi_n e_n\| = \left(\sum_{j=n+1}^{\infty} |\xi_j|^p \right)^{1/p} \to 0, \tag{22}$$

quando $n \to \infty$.

Teorema: Todo espaço normado X que possui uma base de Schauder é separável.

Demonstração: Seja (e_n) base de Schauder. considere o conunto

$$S = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} r_i e_i : r_i \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N} \right\}. \tag{23}$$

Dado

$$S = \left\{ \sum_{i=1}^{n} r_i e_i : r_i \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N} \right\}, \tag{24}$$

temos que S_n é enumerável, pois existe $f : S_n \longrightarrow \mathbb{Q} \times \cdots \times Q$ com $f(x) = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$. Note que f é injetivo, pois se $x = \sum_{i=1}^{n} r_i^x e_i$, $y = \sum_{i=1}^{n} r_i^y e_i$ e $f(x) = f(y)$, então $r_i^x = r_i^y$, $i = 1, 2, \ldots, n$, o que implica que $x = y$. Como $\mathbb{Q}^n$ é enumerável, temos que S_n é enumerável e

$$S = \cup_{n=1}^{\infty} S_n \tag{25}$$

é enumerável.

Note que S é denso em X, pois dado $x \in X$, existe $n \in \mathbb{N}$ e $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\|x - \alpha_1 e_1 - \cdots - \alpha_n e_n\| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{26}$$

Como $\mathbb{R}$ é separável, existe $(r_1, r_2, \ldots, r_n) \in \mathbb{Q}^n$ tal que

$$|\alpha_i - r_i| < \frac{\epsilon}{2n\|e_i\|}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{27}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \|x - r_1 e_1 - \ldots x_n e_n\| &\leq \|x - \alpha_1 e_1 - \cdots - \alpha_n e_n\| + \|(\alpha_1 - r_1) e_1 - \cdots - (\alpha_n - r_n) e_n\| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i - r_i| \|e_i\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{n\epsilon}{2n} = \epsilon. \end{aligned} \tag{28}$$