Espaços Métricos

- Noção de distância na reta real
$$d(x,y) = |x-y| \tag{1}$$

- Generalizamos essa noção de distância para um conjunto qualquer através de suas principais propriedades.

Definição (Espaços Métricos): Um espaço métrico é um par (X,d), onde X é um conjunto e d é uma métrica em X, isto é, uma função $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\forall x,y,z \in X$, temos:

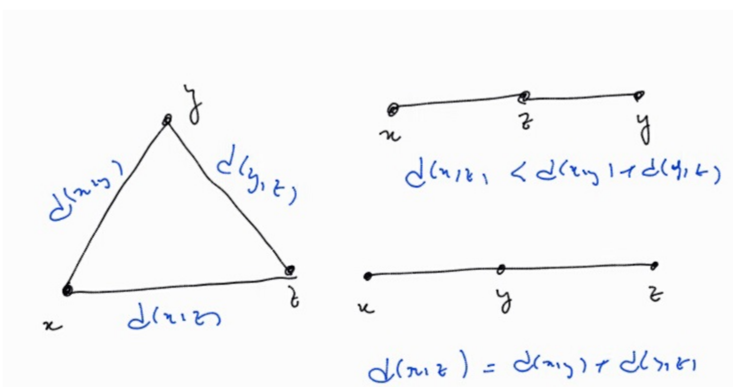
i) $d(x,x) = 0$.

ii) Se $x \neq y$, então $d(x,y) > 0$.

iii) $d(x,y) = d(y,x)$ (simetria).

iv) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (desigualdade triangular).

A desigualdade trangular nos diz que no plano Euclidiano, o comprimento de um dos lados de um triangulo não excede a soma dos outros dois.



Exemplo (A métrica zero-um): Qualquer conjunto X pode se tonar um espaço métrico de maneira muito simples: Defina $d : X \times X \longleftrightarrow \mathbb{R}$ por $d(x,x) = 0$ e $d(x,y) = 1$ se $x \neq y$.

Exemplo (A métrica induzida): Se (X,d) é um espaço métrico e $Y \subset X$, considere a restrição $d|_Y$ de d a $Y \times Y$. Então $(Y, d|_Y)$ é espaço métrico (elementos de Y possuem a mesma distância que possuíam como elementos de X). $(Y, d|_Y)$ é chamado subespaço de (X,d).

Exemplo (A reta real $\mathbb{R}$): A métrica neste caso é simplesmente $d(x,y) = |x-y|$.

Exemplo (O plano Euclidiano $\mathbb{R}^2$): Sejam $x = (\xi_1, \xi_2)$ e $y = (\eta_1, \eta_2)$ elementos de $\mathbb{R}^2$. Definimos a métrica d neste caso como
$$d(x,y) = \sqrt{(\xi_1 - \eta_1)^2 + (\xi_2 - \eta_2)^2}. \tag{2}$$

Exemplo (O espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$): Sejam $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ e $y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ elementos de $\mathbb{R}^n$. Definimos a métrica d neste caso como

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \eta_i^2)}. \tag{3}$$

Esta métrica não é a única métrica em $\mathbb{R}^n$. Em particular, podemos definir em $\mathbb{R}^n$ a métrica zero-um. Veremos adiante outras métricas em $\mathbb{R}^n$.

Vejamos que d acima define realmente uma métrica em $\mathbb{R}^n$. Para isso devemos mostrar que d satisfaz as quatro propriedades que definem uma métrica. Neste caso, as três primeiras propriedades são óbvias. Provaremos então apenas a quarta delas. Para isso, utilizamos a já conhecida desigualdade de Cauchy-Schwarz de álgebra linear. Ela nos diz que

$$| < x, y > | \leq \|x\| \|y\| \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n. \tag{4}$$

Portanto, para $(a_i), (b_i) \in \mathbb{R}^n$ temos

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}. \tag{5}$$

Isto implica que

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \leq \ \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \tag{6}$$

e, portanto

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2 \leq \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} \right)^2. \tag{7}$$

Tome $a_i = \xi_i - \eta_i$ e $b_i = \eta_i - \zeta_i$, onde $x = (\xi_i), y = (\eta_i), z = (\zeta_i) \in \mathbb{R}^n$. Temos assim

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \zeta_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \eta_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\eta_i - \zeta_i)^2}, \tag{8}$$

que é exatamente

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z). \tag{9}$$

Exemplo: O mesmo vale para $\mathbb{C}^n$ com

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\xi_i - \eta_i|^2}. \tag{10}$$

Obviamente em $\mathbb{C}$, temos

$$d(x,y) = |x - y|. \tag{11}$$

Exemplo: Sejam (X, d) e $(Y, \tilde{d})$ espaços métricos. Podemos dotar o produto $X \times Y$ de uma métrica definindo a distância de $z = (x, y)$ até $z' = (x', y')$ por

a) $d(z,z') = \sqrt{d(x,x')^2 + \tilde{d}(y,y')^2}$.

b) $d'(z,z') = d(x,x') + \tilde{d}(y,y')$.

c) $d''(z,z') = \max\{d(x,x'), \tilde{d}(y,y')\}$.

Para $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$, definimos

a) $d(x,y) = \sqrt{d(x_1,y_1)^2 + \cdots + d(x_n,y_n)^2}$.

b) $d'(x,y) = d(x_1,y_1) + \cdots + d(x_n,y_n)$.

c) $d''(x,y) = \max\{d(x_1,y_1), \ldots, d(x_n,y_n)\}$.

Neste caso $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$ pertencem a $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$.

Proposição: As métricas d, d', d'' satisfazem $\forall x, y \in X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$

$$d''(x,y) \leq d(x,y) \leq d'(x,y) \leq nd''(x,y). \tag{12}$$

Demonstração: Todas óbvias, exceto $d(x,y) \leq d'(x,y)$. Para demosntrarmos esta desigualdade, note que

$$d'(x,y)^2 = \sum_{i=1}^{n} d(x_i,y_i)^2 + 2\sum_{i \neq j} d(x_i,y_i)d(x_j,y_j) = d(x,y)^2 + 2\sum_{i \neq j} d(x_i,y_i)d(x_j,y_j) \geq d(x,y)^2. \tag{13}$$

Portanto, em $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^{(n)}$) podemos ter

- $d'(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |\xi_i - \eta_i|$.
- $d''(x,y) = \max_{1 \leq i \leq n} \{|\xi_i - \eta_i|\}$.

Exemplo (O espaço das sequências l^∞): X =espaço das sequências limitadas de números complexos (ou reais). Isto é, se $x = (\xi_1, \xi_2 \ldots) = (\xi_i)$, temos

$$|\xi_j| \leq c_x \ \forall j \in \mathbb{N}. \tag{14}$$

Se $y = (\eta_j)$, definimos a métrica

$$d(x,y) = \sup_{j \in \mathbb{N}} \{|\xi_j - \eta_j|\}. \tag{15}$$

Exemplo (Um espaço de funções): Seja X = conjunto arbitário. $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ pertence a $\mathcal{B}(X;\mathbb{R})$ quando $|f(x)| \leq k_f$ para todo $x \in X$. Defina em $\mathcal{B}(X;\mathbb{R})$ a métrica

$$d(x,y) = \sup_{x \in X} \{|f(x) - g(x)|\} \tag{16}$$

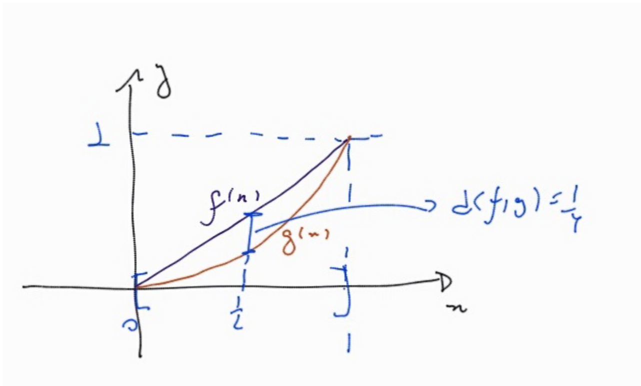
Se $X = [0,1]$ e $f(x) = x, g(x) = x^2 \in \mathcal{B}([0,1];\mathbb{R})$ temos

$$d(f,g) = \sup_{x \in [0,1]} \{|f(x) - g(x)|\} = |f(1/2) - g(1/2)| = 1/4, \tag{17}$$

por um simples exercício de cálculo.

Exemplo (Espaço das funções contínuas $C[a,b]$): Sejam $x(t)$ e $y(t)$ funções contínuas em $J = [a,b]$. Definimos as métricas

$$d(x,y) = \max_{t \in J} \{|x(t) - y(t)|\} \tag{18}$$



e

$$\tilde{d}(x,y) = \int_a^b |x(t) - y(t)| dt \tag{19}$$

Exemplo: Seja X o conjunto das funções integráveis em $[a,b]$. Dadas $f, g \in X$, definimos

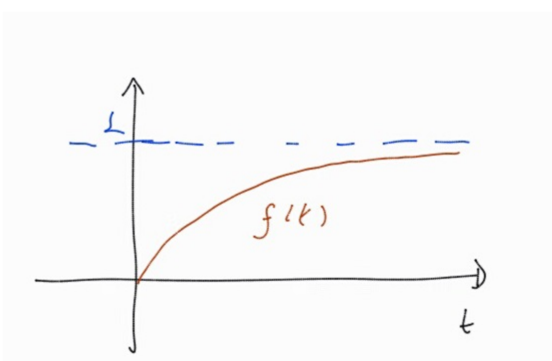
$$d(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx. \tag{20}$$

Note que d não é métrica em X, pois f e g podem diferir em um conjunto finito de pontos em $[a,b]$. Como $f - g = 0$, salvo nesses pontos, temos $d(f,g) = 0$, mas $f \neq g$. Dizemos que d neste caso é pseudo-métrica.

Exemplo (O espaço de sequências s): Seja s o espaço de todas as sequências de números complexos $x = (\xi_j)$ com a métrica

$$d(x,y) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{|\xi_j - \eta_j|}{1 + |\xi_j - \eta_j|}. \tag{21}$$

Para mostrarmos que d é métrica, vejamos primeiramente a função $f(t) = \frac{t}{1+t}$. Esta funçao é



estritamente crescente e limitada $f(t) \leq 1$. Logo, dados $x = (\xi_j)$ e $y = (\eta_j)$ em s, temos

$$\frac{|\xi_j - \eta_j|}{1 + |\xi_j - \eta_j|} \leq 1 \ \forall j. \tag{22}$$

Portanto, pelo teste da comparação

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{|\xi_j - \eta_j|}{1 + |\xi_j - \eta_j|} \text{ converge.} \tag{23}$$

Já que d faz sentido como funçao, vejamos que satisfaz a propriedade iv) da métrica. Como $f(t)$ é estritamete crescente, temos

$$|a + b| \leq |a| + |b| \Longrightarrow f(|a + b|) \leq f(|a| + |b|). \tag{24}$$

Dessa forma

$$\begin{aligned} \frac{|a+b|}{1+|a+b|} &\leq \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|} = \frac{|a|}{1+|a|+|b|} + \frac{|b|}{1+|a|+|b|} \\ &\leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}. \end{aligned} \tag{25}$$

Tome $a = \xi_j - \eta_j$ e $b = \eta_j - \zeta_j$. Então

$$\frac{|\xi_j - \zeta_j|}{1 + |\xi_j - \zeta_j|} \leq \frac{|\xi_j - \eta_j|}{1 + |\xi_j - \eta_j|} + \frac{|\eta_j - \zeta_j|}{1 + |\eta_j - \zeta_j|} \tag{26}$$

e portanto

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{|\xi_j - \zeta_j|}{1 + |\xi_j - \zeta_j|} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{|\xi_j - \eta_j|}{1 + |\xi_j - \eta_j|} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{|\eta_j - \zeta_j|}{1 + |\eta_j - \zeta_j|} \Longrightarrow d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z). \tag{27}$$