Completude e completamento

Exemplo: $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$ são completos.

Demonstração: Vejamos $\mathbb{R}^n$. Para isso, seja $(x_m) = (\xi_1^{(m)}, \ldots, \xi_n^{(m)})$ sequência de Cauchy em $\mathbb{R}^n$. Então dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_m, x_r) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(r)})} < \epsilon \ \forall m, r > N. \tag{1}$$

Mas

$$|\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(r)}| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(r)})} < \epsilon \text{ para } i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

Temos assim $(\xi_j^{(m)})$ sequência de Cauchy nos reais. Logo $\xi_j^{(m)} \to \xi_j$ quando $m \to \infty$. Defina $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$. Como

$$d(x_m, x_r) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(r)})} < \epsilon, \tag{3}$$

temos no limite quando $r \to \infty$

$$d(x_n, x_r) = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} (\xi_j^{(m)} - \xi_j)} \leq \epsilon \ \forall m > N. \tag{4}$$

Logo $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Ou seja, dado (x_n) de Cauchy qualquer, mostramos que $x_n \to x \in \mathbb{R}^n$. Logo $\mathbb{R}^n$ é completo. O mesmo vale para $\mathbb{C}^n$.

Exemplo: A bola fechada $B[x; r]$ e a esfera $B[x; r]$ em $\mathbb{R}^n$ são espaços métricos completos, já que são subconjuntos fechados de $\mathbb{R}^n$.

Exemplo: l^∞ é completo.

Demonstração: Seja (x_n) sequência de Cauchy em l^∞, $(x_n) = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \ldots)$. Então dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall m, n > N$

$$d(x_m, x_n) = \sup_{j\in\mathbb{N}} \{|\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(n)}|\} < \epsilon. \tag{5}$$

Obiviamente, para cada $j \in \mathbb{N}$ temos

$$|\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(n)}| < \epsilon \ \forall m, n \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

Temos assim $(\xi_j^{(m)})$ de Cauchy em $\mathbb{R}$ e, portanto,

$$\lim_{m\to\infty} \xi_j^{(m)} = \xi_j \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

Defina $x = (\xi_j)$. Mostraremos primeiramente que $x \in l^\infty$. Ora,

$$|\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(n)}| < \epsilon \ \forall m, n > N. \tag{8}$$

No limite quando $n \to \infty$, temos

$$|\xi_j^{(m)} - \xi_j| \leq \epsilon \ \ \forall m > N. \tag{9}$$

Logo

$$|\xi_j| \leq |\xi_j - \xi_j^{(N+1)}| + |\xi_j^{(N+1)}| \leq \epsilon + k_{N+1}, \tag{10}$$

onde $|\xi_j^{(m)}| \leq k_{N+1} \ \forall j$. Portanto (ξ_j) é limitado e pertence a l^∞.

Além disso

$$|\xi_j^{(m)} - \xi_j| \leq \epsilon \ \ \forall m > N \forall j \in \mathbb{N}. \tag{11}$$

Isto implica que

$$d(x_m, x) = \sup_{j \in \mathbb{N}} \{|\xi_j^{(m)} - \xi_j|\} \leq \epsilon \ \ \forall M > N, \tag{12}$$

logo $x_n \to x$. Concluímos assim que l^∞ é completo.

Exemplo: O espaço l^p, $1 \leq p < \infty$ com a métrica

$$d(x,y) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j - \eta_j|^p \right)^{1/p}$$

é completo.

Demonstração: Seja $(x_n) = (\xi_j^{(n)})$ sequência de Cauchy qualquer em l^p. Dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall m, n > N$

$$d(x_m, x_n) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j^{(m)} - \eta_j^{(n)}|^p \right)^{1/p} < \epsilon. \tag{13}$$

Logo, para cada $j \in \mathbb{N}$, temos

$$|\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(n)}| < \epsilon \ \ \forall m, n > N. \tag{14}$$

Assim, para cada $j \in \mathbb{N}$, temos $(\xi_j^{(n)})$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) e, portanto converge

$$\lim_{n \to \infty} \xi_j^{(n)} = \xi_j \in \mathbb{R}(\mathbb{C}). \tag{15}$$

Defina $x = (\xi_j) \in l^p$.

1) Vejamos que $x \in l^p$. Para isto, temos que $\forall m, n < N$

$$\sum_{j=1}^{k} |\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(n)}|^p < \epsilon^p \ \ \forall k \in \mathbb{N}. \tag{16}$$

No limite quando $n \to \infty$, temos

$$\sum_{j=1}^{k} |\xi_j^{(m)} - \xi_j|^p \leq \epsilon^p \ \ \forall k \in \mathbb{N}. \tag{17}$$

Logo temos uma seqência s_k crescente e limitada. Então vale

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j^{(m)} - \xi_j|^p \leq \epsilon^p. \tag{18}$$

Dessa forma, a sequência $(x - x_n) = (\xi_j - \xi_j^{(n)})$ pertence a l^p. Como $x_n \in l^p$, temos que $x = (x_n + (x - x_n))$ pertence a l^p, pois

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p\right)^{1/p} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j - \xi_j^{(n)} + \xi_j^{(n)}|^p\right)^{1/p} /leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j^{(n)}|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j - \xi_j^{(n)}|^p\right)^{1/p} < \infty \tag{19}$$

por $Minkowski$ e já que (x_n) está em l^p. Assim $x = (\xi_j) \in l^p$.

2) Vejamos que $x_n \to x$. Ora, vimos que

$$d(x_n, x)^p = \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j^{(m)} - \xi_j|^p \leq \epsilon^p \;\; \forall m > N. \tag{20}$$

Logo $d(x_m, x) \leq \epsilon \; \forall m > n$. Mas isto quer dizer que $x_m \to x$. Logo l^p é completo.

Exemplo: Vimos que l^1 é completo com a norma

$$d(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j - \eta_j|. \tag{21}$$

Mas l^1 é o conjunto de todas as sequências $x = (\xi_j)$ tais que

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j| < \infty. \tag{22}$$

Logo, se $x \in l^1$, então x é limitada e, portanto, $x \in l^\infty$. Vejamos então que l^1, como subconjunto de l^∞ não é completo. Concluiremos assim que um conjunto não é completo por si só. A noção de completude depende da métrica.

Demonstração: Consideremos a sequência (x_n) em l^1 da forma

$$x_n = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, 0, 0 \ldots\right). \tag{23}$$

Para cada $m, n \in \mathbb{N}$ com $m > n$, temos

$$d(x_m, x_n) = \sup\left\{\frac{1}{n+1}, \ldots, \frac{1}{m}\right\} = \frac{1}{n+1}, \tag{24}$$

logo (x_n) é de Cauchy. Suponhamos que exista $x \in l^1$ tal que $d(x_n, x) \to 0$ quando $n \to \infty$.

Note que para cada $j \geq 1$, temos

$$|\xi_j^{(n)} - \xi_j| \leq \sup_{j \in \mathbb{N}} \{|\xi_j^{(n)} - \xi_j|\} = d(x_n, x). \tag{25}$$

Fixando j e tomando $n \to \infty$, temos

$$\left|\frac{1}{j} - \xi_j\right| \leq \lim_{n \to \infty} d(x_n, x) = 0 \Rightarrow \xi_j = \frac{1}{j}. \tag{26}$$

Mas $x = (1/j) \notin l^1$. Contradição! Logo, o subespaço das sequências absolutamente convergentes de l^∞ não é completo. Como l^∞ é completo, concluímos que esse subespaço não é fechado.

Exemplo: $C[a,b]$ com a métrica do máximo é completo.

Demonstração: Seja (x_n) sequência de Cauchy em $C[a,b]$. Dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_m, x_n) = \max_{t \in [a,b]} |x_m(t) - x_n(t)| < \epsilon \tag{27}$$

para todo $m, n > N$. Logo , dado $t_0 \in [a,b]$, temos

$$|x_m(t_0) - x_n(t_0)| \leq \max_{t \in [a,b]} |x_m(t) - x_n(t)| < \epsilon \tag{28}$$

para todo $m, n > N$.

Portanto $(x_n(t_0))$ é de Cauchy em $\mathbb{R}$. Defina $x(t)$ através de $x_n(t_0) \to x(t_0)$, $t_0 \in [a,b]$.Vejamos que $x(t) \in C[a,b]$. Note que

$$\max_{t \in [a,b]} |x_m(t) - x_n(t)| < \epsilon \ \forall m, n > N. \tag{29}$$

No limite quando $n \to \infty$, temos

$$\max_{t \in [a,b]} |x_m(t) - x(t)| \leq \epsilon \ \forall m > N. \tag{30}$$

Portanto, $(x_n(t_0))$ converge uniformemente para $x(t)$, logo $x(t)$ é função contínua.

Além disso

$$d(x_n, x) = \max_{t \in [a,b]} |x_m(t) - x(t)| \leq \epsilon \forall m > N, \tag{31}$$

e portanto $x_n \to x$. Concluímos assim que $C[a,b]$ é completo.

Exemplo: $C[0,1]$ com a métrica da integral não é completo.

Demonstração: Considere a seguinte sequência

$$x_n(t) = \begin{cases} 0, \ \ x \in \left[0, \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n}\right] \\ n\left(x - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n}\right), \ \ x \in \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{2}\right) \\ 1, \ \ x \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]. \end{cases} \tag{32}$$

Note que $d(x_m, x_n)$ é a área da figura

$$d(x_m, x_n) = \frac{\text{base x altura}}{2} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{m}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right)\right] = \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{m}}{2} \tag{33}$$

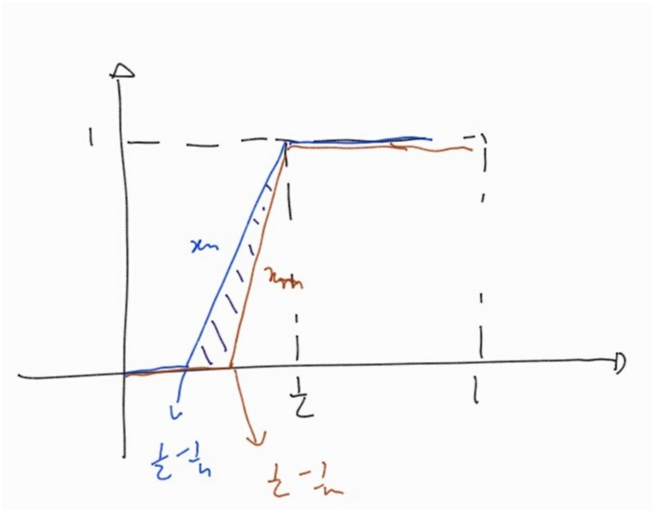
e, claramente, $(x_n(t))$ é de Cauchy.

Suponha agora que exista $x(t)$ contínua tal que

$$\lim_{n \to \infty} d(x_n, x) = \lim_{n \to \infty} \int_0^1 |x_n(t) - x(t)| dt = 0. \tag{34}$$

Mas

$$\int_0^1 |x_n(t) - x(t)| dt = \int_0^{\frac{1}{2} - \frac{1}{n}} |x(t)| dt + \int_{\frac{1}{2} - \frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}} \left| n\left(x - \frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right) - x(t) \right| dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 |1 - x(t)| dt. \tag{35}$$



Portanto
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 |x_n(t)-x(t)|dt = 0 \tag{36}$$
implica que cada integral se anula. Logo
$$\int_0^{\frac{1}{2}} |x(t)| = 0 \tag{37}$$
e
$$\int_{\frac{1}{2}}^1 |1-x(t)| = 0. \tag{38}$$
Portanto
$$x(t) = \begin{cases} 0, & x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right) \\ 1, & x \in \left(\dfrac{1}{2}, 1\right] \end{cases} \tag{39}$$
Logo $x(t)$ não pode ser contínua (absurdo!). Concluimos assim que $C[0,1]$ com a métrica da integral não é completo .

Isometrias

Definiçao: Sejam (X,d) e $(\tilde{X},\tilde{d})$ espaços métricos. Então

a) Um mapa $T : X \longrightarrow \tilde{X}$ é dito isometria se $\forall x, y, \in X$
$$\tilde{d}(Tx,Ty) = d(x,y) \text{ (}T\text{ preserva distância).} \tag{40}$$

b) X e $\tilde{X}$ são ditos espaços isométricos se existir uma isometria bijetiva de X em $\tilde{X}$.

Espaços isométricos diferem na natureza de seus pontos, mas são indistinguíveis de ponto de vista métrico.

Exemplo: $X = \mathbb{R}$ e $X = \mathbb{R}^n$. Tome $a, u \in \mathbb{R}^n$ com $\|u\| = 1$. A aplicação $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $f(t) = a + tu$ é uma isometria, pois
$$\tilde{d}(f(s), f(t)) = \|f(s)-f(t)\| = \|a+su-(a+tu)\| = \|(s-t)u\| = |s-t|\|u\| = |s-t| = d(s,t). \tag{41}$$

Exemplo: $X = \mathbb{C}^2$, $\tilde{X} = \mathbb{C}^2$. Dado $u = a + ib$ com $\sqrt{a^2 + b^2} = 1$, defina $f : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ por $f(z) = uz$. Então

$$d(f(z_1), f(z_2)) = |uz_1 - uz_2| = |u(z_1 - z_2)| = |u||z_1 - z_2| = |z_1 - z_2| = d(z_1, z_2). \tag{42}$$

Definição: O completamento de um espaço métrico (X, d) é um par consistindo de um espaço métrico completo $(\hat{X}, \hat{d})$ e uma isometria $T : X \longrightarrow \hat{X}$ tal que $W = T(X)$ é denso em $\hat{X}$.

Lema: Seja (X, d) espaço métrico e A denso tal que toda sequância de Cauchy em A converge em X. Então X é completo.

Demonstração: Seja (x_n) sequência de Cauchy em X. Como A é denso em X, para cada x_n, existe $z_n \in A$ tal que

$$d(x_n, z_n) < 1/n. \tag{43}$$

Logo

$$d(z_m, z_n) \leq d(z_m, x_m) + d(x_m, x_n) + d(x_n, z_n) < \frac{1}{m} + d(x_m, x_n) + \frac{1}{n} < \epsilon \tag{44}$$

para m, n suficientemente grandes. Logo (z_n) é de Cauchy e, portanto, converge em X, isto é, $\lim_{n\to\infty} z_n = z \in X$. Mostremos que $x_n \to z$. Para isto

$$d(x_n, z) \leq d(x_n, z_n) + d(z_n, z) < \frac{1}{n} + d(z_n, z) \longrightarrow 0 \tag{45}$$

quando $n \to \infty$.

Teorema: Todo espaço métrico possui um completamento.

Demonstração: Seja (X, d) espaço métrico. Denote por $\mathcal{C}[X]$ a coleção de todas as sequências de Cauchy em X. Defina a relação de equivalência $\sim$ em $\mathcal{C}[X]$ por

$$(x_n) \sim (y_n) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0. \tag{46}$$

Seja $\hat{X}$ o conjunto de todas as classes de equivalência por $\sim$:

$$\hat{X} = \{[(x_n)] : (x_n) \in \mathcal{C}[X]\}. \tag{47}$$

Dados $\hat{x} = [(x_n)]$ e $\hat{y} = [(y_n)]$ em $\hat{X}$, defina $\hat{d} : \hat{X} \times \hat{X} \longrightarrow [0, \infty)$ por

$$\hat{d}(\hat{x}, \hat{y}) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n). \tag{48}$$

Vejamos primeiramente que $\hat{d}$ está bem definida:

a) $d(x_n, y_n)$ converge, pois

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x_m) + d(x_m, y_m) + d(y_m, y_n) \Rightarrow |d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| \leq d(x_n, x_m) + d(y_m, y_n). \tag{49}$$

Como (x_n) e (y_n) é de Cauchy, temos que $(d(x_n, y_n))$ é de Cauchy em $\mathbb{R}$. Logo $(d(x_n, y_n))$ converge em $\mathbb{R}$.

b) $\hat{d}$ independe dos representantes, pois sejam $(x_n) \sim (x'_n)$ e $(y_n) \sim (y'_n)$. Então

$$|d(x_n, y_n) - d(x'_n, y'_n)| \leq d(x_n, x'_n) + d(y_n, y'_n) \to 0 \tag{50}$$

quando $n \to \infty$. Portanto $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} d(x'_n, y'_n)$.

Mostraremos agora que $\hat{d}$ é métrica. Para isto, sejam $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z} \in \hat{X}$. Então

a) $\hat{d}(\hat{x}, \hat{y}) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0 \Leftrightarrow (x_n) \sim (y_n) \Leftrightarrow \hat{x} = \hat{y}$.

b) $\hat{d}(\hat{x}, \hat{y}) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} d(y_n, x_n) = \hat{d}(\hat{y}, \hat{x})$.

c) $d(x_n, z_n) \leq d(x_n, y_n) + d(y_n, z_n)$ e no limite quando $n \to \infty$ temos $\hat{d}(\hat{x}, \hat{z}) \leq \hat{d}(\hat{x}, \hat{y}) + \hat{d}(\hat{y}, \hat{z})$.
Logo $\hat{d}$ é métrica em $\hat{X}$.

Vamos agora construir uma isometria $T : X \longrightarrow \hat{X}$. Sejam $x \in X$ e $\hat{x} = [(x, x, , \dots)] \in \hat{X}$. Defina $T : X \longrightarrow \hat{X}$ por $Tx = \hat{x}$. Então $\forall x, y \in X$, temos

$$\hat{d}(Tx, Ty) = \hat{d}(\hat{x}, \hat{y}) = \lim_{n\to\infty} d(x, y) = d(x, y), \tag{51}$$

logo T é isometria de X em $\hat{X}$.

- $W = T(X)$ é denso em $\hat{X}$, pois seja $\hat{x} = [(x_n)] \in \hat{X}$ e seja $\epsilon > 0$. Como (x_n) é de Cauchy, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall m, n \geq N$ temos $d(x_m, x_n) < \epsilon/2$. Seja $z = x_N$. então $\hat{z} \in W$ e

$$\hat{d}(\hat{x}, \hat{z}) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, z) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, z_N) \leq \epsilon/2 < \epsilon. \tag{52}$$

Logo $\hat{z} \in B_{\hat{X}}(\hat{x}; \epsilon) \cap T(X)$ e, portanto, W é denso em $\hat{X}$.

Falta agora mostrar que $\hat{X}$ é completo. Para isso, seja $(\hat{z}_n)$ sequência de Cauchy em W, onde cada $\hat{z}_k$ é representado pela sequência $(z_k, z_k, \dots)$. Como T é isometria,

$$d(z_n, z_m) = \hat{d}(\hat{z}_n, \hat{z}_m). \tag{53}$$

Logo (z_n) é de Cauchy em X. Seja $\hat{z} = [(z_n)]$ em $\hat{X}$. Vejamos que $(\hat{z}_m)$ converge para $\hat{z}$. Para isto, dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(z_k, z_n) < \frac{\epsilon}{2} \ \ \forall k, n \geq N. \tag{54}$$

Logo, para cada $k \geq N$ temos

$$\hat{d}(\hat{z}_n, \hat{z}) = \lim_{n\to\infty} d(z_k, z_n) \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon. \tag{55}$$

Isto mostra que $(\hat{z}_n)$ converge para $\hat{z}$ em $\hat{X}$. Pelo lema anterior $\hat{X}$ é completo.

Teorema: O completameto de um espaço métrico é único, a menos de isometria.

Demonstração: Sejam $(\hat{X}, \hat{d})$ e $(\tilde{X}, \tilde{d})$ completamentos de (X, d) com as isometrias $\hat{T} : X \longrightarrow W_1 = \hat{T}(X)$ e $\tilde{T} : X \longrightarrow W_1 = \tilde{T}(X)$. Logo W_1 é isométrico a W_2 via a isometria $\rho = \tilde{T} \circ \hat{T}^{-1} : W_1 \longrightarrow W_2$.

Seja $\hat{x} \in \hat{X}$. Então existe $(\hat{x}_n)$ em W_1 tal que $\lim_{n\to\infty} \hat{x}_n = \hat{x}$ pois W_1 é denso em $\hat{X}$. Como $(\hat{x}_n)$ é de Cauchy e ρ é isometria, temos $(\tilde{y}_n) \equiv (\rho \hat{x}_n)$ é sequência de Cauchy em $W_2 \subset \tilde{X}$. Como $\tilde{X}$ é completo, existe $\tilde{y} \in \tilde{X}$ tal que $\lim_{n\to\infty} \tilde{y}_n = \tilde{y}$.

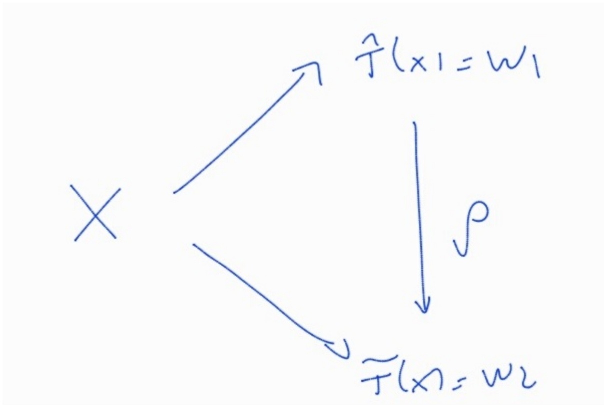
Defina $\psi : \hat{X} \longrightarrow \tilde{X}$ por $\hat{x} \mapsto \tilde{y}$ segundo a construção acima.

a) ψ está bem definida. Para isto, seja $(\hat{x}'_n)$ em W_1 tal que $\lim_{n\to\infty} \hat{x}'_n = \hat{x}$. Então $\tilde{y}'_n \equiv \rho \hat{x}'_n$ é de Cauchy em W_2. Logo existe $\tilde{y}' \in \tilde{X}$ tal que $\lim_{n\to\infty} \tilde{y}'_n = \tilde{y}'$.

Mas

$$\tilde{d}(\tilde{y}, \tilde{y}') = \lim_{n\to\infty} \tilde{d}(\tilde{y}_n, \tilde{y}'_n) = \lim_{n\to\infty} \hat{d}(\hat{x}_n), \hat{x}'_n = \hat{d}(\hat{x}, \hat{x}) = 0, \tag{56}$$

onde utilizamos o fato de ρ ser isometria. Portanto $\tilde{y} = \tilde{y}'$.



b) ψ é sobre. Para isto, seja $\tilde{y} \in \tilde{X}$. Então existe $(\tilde{y}_n)$ em W_2 tal que $\lim_{n\to\infty} \tilde{y}_n = \tilde{y}$. Logo $(\tilde{y}_n)$ é de Cauchy, e como ρ^{-1} é isometria, a sequência $(\hat{x}_n)$ em $\hat{X}$ com $\hat{x}_n \equiv \rho^{-1}\tilde{y_n}$ é de Cauchy. Como $\hat{X}$ é completo, existe $\hat{x} \in \hat{X}$ tal que $\lim_{n\to\infty} \hat{x}_n = \hat{x}$. Claramente $\psi\hat{x} = \hat{y}$. Logo ψ é sobre.

c) ψ é isometria, pois sejam $\hat{x}, \hat{z} \in \hat{X}$. Então existem $(\hat{x}_n), (\hat{z}_n)$ em W_1 tais que $\lim_{n\to\infty} \hat{x}_n = \hat{x}$ e $\lim_{n\to\infty} \hat{z}_n = \hat{z}$. Portanto

$$\hat{d}(\hat{x}, \hat{z}) = \lim_{n\to\infty} \hat{d}(\hat{x}_n, \hat{z}_n) = \lim_{n\to\infty} \tilde{d}(\rho\hat{x}_n, \rho\hat{z}_n) = \tilde{d}(\tilde{y}, \tilde{w}), \tag{57}$$

onde utilizamos o fato que ρ é isometria e definimos $\tilde{y} \equiv \lim_{n\to\infty} \hat{x}_n$ e $\tilde{w} \equiv \lim_{n\to\infty} \hat{z}_n$. Chegamos assim em

$$\hat{d}(\hat{x}, \hat{z}) = \tilde{d}(\psi\hat{x}, \psi\hat{z}) \tag{58}$$

e conluímos que ψ é ismoteria.

Exemplo: $\mathbb{R}$ é completamento de $\mathbb{Q}$.

Exemplo: Se X é completo e $M \subset X$, o fecho que M em X e um completamento de M. Em partiular $[0, 1]$ é o completamento de $(0, 1)$ em $\mathbb{R}$.