O espaço l^p

Antes de definirmos o espaço l^p, que será exaustivamente utilizado durante o curso, demostraremos três desigualdades. Em particular, a última será essencial na demonstração de que l^p é um espaço métrico.

a) **Desigualdade de Young:** Seja $p > 1$ e q definido por

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \ \ (p \text{ e } q \text{ são expoentes conjugados}). \tag{1}$$

Se A, B são números reais positivos, então

$$AB \leq \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q}. \tag{2}$$

Demonstração: Seja α real com $0 < \alpha < 1$. Considere a função

$$\varphi(t) = \alpha t - t^\alpha, \ \ t \geq 0. \tag{3}$$

Então

$$\varphi'(t) = \alpha - \alpha t^{\alpha-1} = \alpha\left(1 - \frac{1}{t^{1-\alpha}}\right) \begin{cases} < 0 \ \text{ para } \ 0 < t < 1 \\ > 0 \ \text{ para } \ t > 1. \end{cases} \tag{4}$$

Com isso vemos que $\varphi(t) \geq \varphi(1)$. Portanto

$$\alpha t - t^\alpha \geq \varphi(1) = \alpha - 1 \Longrightarrow t^\alpha \leq \alpha t + (1-\alpha). \tag{5}$$

Para a, b não negativos, tome $t = a/b$. Temos assim

$$b\left[\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha\right] \leq b\left[\alpha\left(\frac{a}{b}\right) + (1-\alpha)\right], \tag{6}$$

logo

$$a^\alpha b^{1-\alpha} \leq \alpha a + (1-\alpha)b. \tag{7}$$

Seja agora $1 < p < \infty$ e $1/p + 1/q = 1$. Tome $\alpha = 1/p$ e temos

$$a^{\frac{1}{p}} b^{1-\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{p}a + \left(1 - \frac{1}{p}\right)b \Longrightarrow a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}. \tag{8}$$

Defina $A \equiv a^{\frac{1}{p}}$ e $B \equiv b^{\frac{1}{q}}$ e teremos

$$AB \leq \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q}. \tag{9}$$

Podemos brevemente definir o espaço l^p. Para $p \geq 1$ número real fixo, dizemos que a sequência $x = (\xi_1, \xi_2, \dots)$ pertence a l^p se

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p \ \text{ converge.} \tag{10}$$

Ainda não temos uma métrica em l^p. Para isso devemos provar ainda duas desigualdades.

b) **Disugualdade de Hölder:** Sejam $x = (\xi_j) \in l^p$ e $y = (\eta_j) \in l^q$ com

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{11}$$

Então

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j \eta_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\eta_j|^q \right)^{\frac{1}{q}} \tag{12}$$

Demonstração: Sejam $A = \frac{|\xi_j|}{\left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}}$ e $B = \frac{|\eta_j|}{\left(\sum_{j=1}^{n} |\eta_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}}$ com $n \in \mathbb{N}$ fixo. Pela desigualdade de Young

$$\frac{|\xi_j||\eta_i|}{\left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^{n} |\eta_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p} \frac{|\xi_j|^p}{\sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^p} + \frac{1}{q} \frac{|\eta_j|^q}{\sum_{j=1}^{n} |\eta_j|^q}. \tag{13}$$

Somando de 1 até n, temos

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} |\xi_j \eta_j|}{\left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^{n} |\eta_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{14}$$

Portanto

$$\sum_{j=1}^{n} |\xi_j \eta_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^{n} |\eta_j|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\eta_j|^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty, \tag{15}$$

onde utilizamos na última passagem o fato de $x \in l^p$ e $y \in l^q$ e, portanto, as somas convergem. Descobrimos assim que a sequência

$$s_n = \sum_{j=1}^{n} |\xi_j \eta_j| \tag{16}$$

é monótona, crescente e limitada, logo $\lim_{n \to \infty} s_n$ existe e vale

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j \eta_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\eta_j|^q \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{17}$$

c) **Disugualdade de Minkowski:** Sejam $x = (\xi_j)$ e $y = (\eta_j)$ pertencentes a l^p, então

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j + \eta_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\eta_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{18}$$

Demonstração: Se $p = 1$ temos

$$|\xi_j + \eta_j| \leq |\xi_j| + |\eta_j| \Longrightarrow \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j + \eta_j| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j| + \sum_{j=1}^{\infty} |\eta_j|. \tag{19}$$

Se $p > 1$, temos

$$\sum_{j=1}^{n} |\xi_j + \eta_j|^p = \sum_{j=1}^{n} |\xi_j + \eta_j||\xi_j + \eta_j|^{p-1} \leq \sum_{j=1}^{n} |\xi_j||\xi_j - \eta_j|^{p-1} + \sum_{j=1}^{n} |\eta_j||\xi_j - \eta_j|^{p-1}, \tag{20}$$

pela desigualdade triangular, com $n \in \mathbb{N}$ fixo. Pela desigualdade de Hölder, temos

$$\sum_{j=1}^{n} |\xi_j||\xi_j + \eta_j|^{p-1} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j + \eta_j|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{21}$$

Mas como p e q são expoentes conjugados, temos $q(p-1) = p$. Portanto

$$\sum_{j=1}^{n} |\xi_j||\xi_j + \eta_j|^{p-1} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j + \eta_j|^{p}\right)^{\frac{1}{q}} \tag{22}$$

e, analogamente,

$$\sum_{j=1}^{n} |\eta_j||\xi_j + \eta_j|^{p-1} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |\eta_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j + \eta_j|^{p}\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{23}$$

Dessa forma, cegamos em

$$\sum_{j=1}^{n} |\xi_j + \eta_j|^p \leq \left[\left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^{n} |\eta_j|^p\right)^{1/p}\right] \left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j + \eta_j|^{p}\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{24}$$

Passando o último termo dividindo do lado esquerdo, temos (com $1 - 1/q = 1/p$)

$$\left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j + \eta_j|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^{n} |\eta_j|^p\right)^{1/p}. \tag{25}$$

Como $x, y \in l^p$, temos, pelo mesmo argumento utilizado anteriormente

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j + \eta_j|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\eta_j|^p\right)^{1/p}. \tag{26}$$

Estamos apto para definirmos uma métrica em l^p. Para $x, y \in l^p$, temos

$$d(x, y) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j - \eta_j|^p\right)^{1/p} \tag{27}$$

Note que para $p = 2$ temos o espaço de Hilbert l^2 com a métrica

$$d(x, y) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j - \eta_j|^2\right)^{1/2}. \tag{28}$$

Este espaço será muito importante mais para frente.

Basta mostrarmos agora que d é métrica em l^p. Para isso note que

1)
$$\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j-\eta_j|^p\right)^{1/p} \quad \text{converge por Minkowski,} \tag{29}$$
já que $x=(\xi_j)$ e $y=(\eta_i)$ pertencem a l^p.

2) Para mostrarmos a desigualdade triangular, seja $z=(\zeta_j)\in l^p$. Então

$$\begin{aligned} d(x,z)=\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j-\zeta_j|^p\right)^{1/p} &= \left(\sum_{j=1}^{\infty}|(\xi_j-\eta_j)+(\eta_j-\zeta_j)|^p\right)^{1/p} \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j-\eta_j|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{j=1}^{\infty}(|\eta_j-\zeta_j|^p\right)^{1/p} \\ &= d(x,y)+d(y,x), \end{aligned} \tag{30}$$

onde, da primeira para a segunda linha utilizamos a desigualdade de Minkowski.