Nome: ______________________________ RA: ____________________

Métodos Matemáticos II (F620/MS650) - Prova 1

29 de setembro de 2010

1. (2 pontos) Seja $w = f(z)$ uma função analítica com as $n-1$ primeiras derivadas no ponto $z = z_0$ nulas e $f^{(n)}(z_0) \neq 0$, $n \geq 1$. Mostre que curvas fazendo um ângulo $\Delta\phi$ no ponto z_0 do plano z são levadas por f em curvas fazendo um ângulo $n\,\Delta\phi$ no plano w.

2. (3 pontos) Calcule
$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx.$$

3. (3 pontos) Usando o método da transformada de Fourier, resolva a equação diferencial
$$y'' - a^2 y = e^{-a|x|},$$
onde $a > 0$, com condições de contorno $y(-\infty) = y(\infty) = 0$.

4. (a) (1 ponto) Dado que $f(t) * g(t) = h(t)$, calcule $f(t-1) * g(t+1)$ em termos de $h(t)$.

   (b) (2 pontos) Calcule
$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-is}\,\mathrm{sinc}(s)}{1+s^2}\,ds,$$
   onde $\mathrm{sinc}(x) = \mathrm{sen}(x)/x$ se $x \neq 0$ e $\mathrm{sinc}(x) = 1$ se $x = 0$. Dica: Parseval.

Fórmulas possivelmente úteis:

i. $\mathcal{F}[f](\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{i\omega t} f(t)dt$.

ii. $\mathcal{F}^{-1}[F](t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{-i\omega t} F(\omega)d\omega$.

iii. $(f * g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty f(y)g(x-y)dy$.

iv. Se $b(t) = 1$ para $|t| \leq 1$ e $b(t) = 0$ para $|t| > 1$ (função caixa) e $\varphi(t) = e^{-|t|}$, então $\mathcal{F}[b](\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mathrm{sinc}(\omega)$ e $\mathcal{F}[\varphi](\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+\omega^2}$.

v. Se $g(t) = f(t+a)$ e $h(t) = f(at)$, com $a \neq 0$, então $\mathcal{F}[g](\omega) = e^{-i\omega a}\mathcal{F}[f](\omega)$ e $\mathcal{F}[h](\omega) = \frac{1}{|a|}\mathcal{F}[f](\frac{\omega}{a})$.

vi. $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$.