Nome: ______________________________ RA: ____________________

Métodos Matemáticos I (F520/MS550) - Prova 1

30 de abril de 2014

1. (4 pontos) Encontre a solução geral de

$$xy'' + y' - y = 0$$

em termos de séries de potências generalizadas (para a segunda solução, três termos da série são suficientes).

2. (3 pontos) Considere o sistema de coordenadas parabólicas, dado por

$$x = uv, \qquad y = \frac{1}{2}\left(u^2 - v^2\right).$$

   (a) Esboce essas coordenadas no plano xy;

   (b) Mostre que tais coordenadas são ortogonais;

   (c) Ache a solução mais geral da equação de Laplace, $\nabla^2\psi = 0$, em que $\psi = \psi(u)$ é uma função apenas de u.

3. (2 pontos) Considere uma função infinitamente diferenciável $\phi(x)$ com integral $c = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)dx$ não nula. Seja

$$\phi_n(x) = \frac{1}{c} n\phi(nx).$$

Mostre que $\{\phi_n\}$ é uma seqüência delta. Dê um exemplo de aplicação deste resultado.

4. (1 ponto) Mostre que

$$\int_0^\infty e^{-x^4} dx = \Gamma\left(\frac{5}{4}\right).$$

Fórmulas possivelmente úteis:

$$\nabla\psi = \sum_i \frac{1}{h_i}\frac{\partial\psi}{\partial q_i}\hat{\boldsymbol{q}}_i$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{V} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(V_1h_2h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2}(V_2h_3h_1) + \frac{\partial}{\partial q_3}(V_3h_1h_2)\right]$$

$$\nabla\times\boldsymbol{V} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1\hat{\boldsymbol{q}}_1 & h_2\hat{\boldsymbol{q}}_2 & h_3\hat{\boldsymbol{q}}_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1V_1 & h_2V_2 & h_3V_3 \end{vmatrix}$$

coord. curvilíneas ortogonais
