F078 / MS601 / MT621

Lista 1 (entrega em 21/08, antes da aula)

1. Faça um resumo (de no máximo uma página) da seção 5.2 do livro [Tritton DJ, Physical fluid dynamics, 2nd edition].

2. Mostre que $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik}$ e $\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki}$

3. Seja $M = (M_{ij})$ uma matriz 3x3. Mostre que

$$\det M = \varepsilon_{ijk} M_{1i} M_{2j} M_{3k}$$

4. Mostre que

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{rsk} = \delta_{ir}\delta_{js} - \delta_{is}\delta_{jr}$$

5. Use o exercício anterior para mostrar que

(a) $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$

(b) $\vec{\nabla}\times(\nabla\times\vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A}$

6. Usando o tensor ε_{ijk}, mostre que

(a) $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\varphi = 0$

(b) $\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{A} = 0$

(c) $\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = (\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot\vec{B} - \vec{A}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B})$

(d) $\vec{\nabla}\times(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{A}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}) - \vec{B}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) + (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} - (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B}$

(assuma que tudo é C^∞).

7. Seja $\vec{C}$ um campo constante. Tomando $F_i = c_i \varphi$ e $F_i = \varepsilon_{ijk} G_j c_k$ no teorema da divergência, mostre que (sob quais hipóteses?):

(a) $$\int_V \vec{\nabla}\varphi \, dv = \int_{\partial V} \varphi \vec{n} \, ds$$

(b) $$\int_V \vec{\nabla} \times \vec{G} \, dv = \int_{\partial V} \vec{n} \times \vec{G} \, ds$$

8. Calcule e esboce algumas "pathlines" e "streamlines" para as distribuições de velocidades dadas por (onde $\vec{r} = (x,y)$):

(a) $\vec{v}(\vec{r}, t) = (1, \operatorname{sen} t)$

(b) $\vec{v}(\vec{r}, t) = (x, e^t)$