Lista 9 - Mecânica Clássica

Ricardo Antonio Mosna, novembro de 2017

1. Considere uma partícula 1D com energia E em uma caixa de tamanho $2L$. A hamiltoniana desse sistema a rigor não existe mas podemos considerar o potencial

$$V(x) = V_0 \left(\frac{x}{L}\right)^{2\alpha}$$

e tomar o limite de $\alpha \to \infty$.

   (a) Obtenha a expressão para a variável de ação $I = I(E)$ no limite de $\alpha \to \infty$ e use o resultado para calcular a frequência do movimento em função da energia, $\omega = \omega(E)$. Verifique seu resultado calculando essa mesma quantidade usando física elementar.

   (b) Aplique o método de quantização semi-clássica de Bohr-Sommerfeld:

$$\oint p dq = 2\pi\hbar\, n.$$

   Compare o resultado com o que se obtém do espectro vindo da solução da equação de Schrödinger, $E_n = \frac{\pi^2\hbar^2 n^2}{8ma^2}$. Comente.

2. Considere agora o movimento oscilatório correspondente a uma bola quicando elasticamente no solo, sob a ação da gravidade. Sejam m e E a massa e energia da bola, respectivamente.

   (a) Desenhe a curva deste movimento no espaço de fases para vários valores de E (note que, no instante em que a bola toca o solo, seu momento mantém o módulo mas troca instantaneamente de sinal).

   (b) Ache as varíaveis de ângulo e ação para este problema.

   (c) Determine a frequência das oscilações em função da energia.

   (d) Aplique o método de quantização semi-clássica de Bohr-Sommerfeld e compare o resultado com o que se obtém do espectro vindo da solução da equação de Schrödinger, $E_n = m^{1/3} \left(\frac{3\pi}{2\sqrt{2}}(n - 1/4)\hbar g\right)^{2/3}$. Comente.

3. Repita o exercício anterior para o potencial $V(x) = F_0|x|$, onde F_0 é uma constante positiva.

4. Considere um potencial linearmente dependente do tempo para um sistema hamiltoniano 1D, com $H = \frac{p^2}{2m} + mAt\, x$, onde A é constante. Resolva as equações de movimento usndo o método de Hamilton-Jacobi, com condições iniciais $x(0) = 0$ e $p(0) = mv_0$. Dica: considere o *ansatz* $S(x,t) = f(t)g(x) + h(t)$.