Lista 8 - Mecânica Clássica

Ricardo Antonio Mosna, novembro de 2017

1. Dada uma função $f = f(q^i, p_i, t)$ no espaço de fases estendido, mostre que

$$\frac{\partial f}{\partial q^i} = -\{p_i, f\} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial p_i} = \{q^i, f\}.$$

Interprete estes resultados de acordo com a discussão, vista em aula, de que q^i e p_i são geradores de translações em p_i e q^i.

2. Considere o momento angular $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, isto é, $L_k = \epsilon_{ijk} x_i p_j$. Mostre que

$$\{L_i, L_j\} = \epsilon_{ijk} L_k,$$

que, como vimos, são as relações de comutação de $\mathfrak{so}(3)$. Mostre ainda que $\{L_i, L^2\} = 0$, onde $L^2 = \vec{L} \cdot \vec{L} = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$.

3. Considere uma hamiltoniana proveniente de uma força central,

$$H = \frac{1}{2m} \vec{p}^2 + V(r), \tag{1}$$

onde $r = \|\vec{r}\|$.

   (a) Mostre que $\{L_i, H\} = 0$, $i = 1, 2, 3$.

   (b) Mostre que $\{L^2, H\} = 0$.

   (c) No contexto do teorema de Noether (versão hamiltoniana), qual é a simetria gerada pela quantidade conservada L_3? Aqui você deve fazer o cálculo explícito de $\vec{X}_{L_3}$ e então achar suas curvas integrais. Dica: coordenadas cilíndricas.

   (d) Estenda o resultado do item anterior para a quantidade conservada $l_{\vec{a}} = a^i L_i$, onde a^i são constantes. Dica: seja esperto.

4. *Vetor de Runge-Lenz novamente*

Vimos (muitas vezes) que o vetor de Runge-Lenz

$$\vec{A} = \vec{p} \times \vec{L} - mk \frac{\vec{r}}{r}$$

é conservado no problema de Kepler,

$$H = \frac{1}{2m} \vec{p}^2 - \frac{k}{r}. \tag{2}$$

(a) Chegue a esta conclusão novamente, mostrando agora que $\{\vec{A}, H\} = 0$. Desta forma, temos seis quantidades conservadas aqui: L_i e A_i, $i = 1, 2, 3$.

(b) Vejamos como isso faz com que o grupo de simetrias do problema de Kepler (2) seja maior que o de (1). Vimos que as quantidades conservadas de um sistema hamiltoniano fecham uma álgebra. Vamos calculá-la aqui. Mostre que:

   i. $\{L_a, A_b\} = \epsilon_{abc} A_c$

   ii. $\{A_a, A_b\} = K\epsilon_{abc} L_c$, onde K é uma constante positiva para o caso ligado ($E < 0$).

(c) Assim, a álgebra de Lie gerada por essas seis constantes do movimento é, para o caso ligado e após renormalizar A_i:

$$\{L_a, L_b\} = \epsilon_{abc} L_c;$$
$$\{L_a, A_b\} = \epsilon_{abc} A_c;$$
$$\{A_a, A_b\} = \epsilon_{abc} L_c.$$

Que álgebra, vista em aula, é essa?

Conclusão: O problema de Kepler tem um grupo de simetrias maior que o grupo de rotações de $\mathbb{R}^3$: o primeiro é gerado por $\mathfrak{so}(4)$ e o segundo por $\mathfrak{so}(3)$. Desta forma, o problema de Kepler tem uma "simetria escondida" que faz com que o usual $\mathfrak{so}(3)$ de (1) seja aumentado para um $\mathfrak{so}(4)$, que gera o grupo de rotações de $\mathbb{R}^4$, ainda que o problema "viva" em $\mathbb{R}^3$!